



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

ESCUELA DE INGENIERÍA

# **VALIDACIÓN DEL ANÁLISIS DE TORSIÓN ACCIDENTAL DE ETABS**

**DIEGO JAVIER NAREA CHUMBI**

Informe de Actividad de Graduación para optar al Grado de

Magíster en Ingeniería Estructural y Geotécnica

Profesor Supervisor:

**MATÍAS ANDRÉS HUBE GINESTAR**

Santiago de Chile, octubre, 2017.

A mis padres, hermanos, familia, y  
amigos, por su apoyo incondicional.

## **AGRADECIMIENTOS**

Agradezco a Dios por cada instante de la vida. A mis padres Pablo y Carmen, pues con su amor, trabajo y sacrificio son mi mayor ejemplo, y me han ayudado a seguir adelante. A mis hermanos Pablo y Patricia quienes me han inspirado y apoyado enormemente en este camino. A mi tía Inés, quien es una segunda madre en esta vida y como tal ha velado siempre por mis hermanos y por mí. A toda mi familia y amigos que de una u otra manera han estado presentes alentándome.

Al Profesor Matías Hube Ginestar, por haberme permitido contar con su participación como Supervisor del presente trabajo, por toda la colaboración y apoyo brindados. Fue una experiencia enriquecedora el haber sido su alumno y finalmente poder desarrollar mi trabajo final con su guía.

Al Profesor Jorge Vásquez Pinillos, Director del Magíster, por haberme brindado la oportunidad de cursar el posgrado, y a todo su equipo de trabajo.

A todos los Docentes del Magíster en Ingeniería Estructural y Geotécnica por los conocimientos impartidos. A todos los compañeros de aula con los que se pudo trabajar y compartir distintas experiencias y aprendizajes.

## ÍNDICE GENERAL

	Pág.
DEDICATORIA.....	ii
AGRADECIMIENTOS .....	iii
ÍNDICE DE TABLAS .....	vi
ÍNDICE DE FIGURAS.....	x
RESUMEN.....	xii
ABSTRACT .....	xiii
I. INTRODUCCIÓN.....	14
II. ESTADO DEL ARTE .....	16
II.1 Norma Chilena NCh 433 y DS N° 61 .....	16
II.2 Norma Ecuatoriana NEC-SE-DS .....	17
II.3 Norma Norteamericana ASCE/SEI 7–10.....	18
II.4 Norma Europea EN 1998-1:2004.....	19
II.5 Torsión accidental con ETABS.....	20
III. VALIDACIÓN DE ESTRUCTURA DE UN PISO .....	23
III.1 Características y Propiedades de la Estructura.....	23
III.2 Análisis Modal Espectral del Marco de un Piso.....	36

III.3 Inclusión de Torsión Accidental en la Estructura de Un Piso .....	39
IV. VALIDACIÓN PARA ESTRUCTURAS DE VARIOS PISOS .....	51
IV.1 Modelo para la estructura de varios pisos .....	51
IV.2 Análisis Modal Espectral del Edificio de Cinco Pisos .....	56
IV.3 Respuesta de la Estructura de Cinco Pisos Incluyendo la Torsión Accidental.....	59
V. CONCLUSIONES.....	67
BIBLIOGRAFIA.....	70
A N E X O S.....	72
Anexo A : TABLAS COMPLEMENTARIAS .....	73
Anexo B : CÓDIGOS EMPLEADOS PARA EL ALGORITMO EN MATLAB .....	82

## ÍNDICE DE TABLAS

	Pág.
Tabla III-1: Propiedades mecánicas asumidas para el concreto reforzado. ....	25
Tabla III-2: Efectos considerados en los elementos tipo barra. ....	29
Tabla III-3: Efectos considerados en los elementos tipo placa delgada.....	30
Tabla III-4: Colocación de los elementos en la matriz de rigidez del marco de un piso.....	32
Tabla III-5: Frecuencias circulares y períodos del marco de un piso.....	33
Tabla III-6: Resumen de propiedades modales para la estructura de un piso. ....	35
Tabla III-7: Pseudoaceleración y desplazamientos máximos modales del marco de un piso para el espectro ENCh1.....	37
Tabla III-8: Fuerzas equivalentes y resumen de respuesta de marco de un piso mediante AME sometida a acción sísmica en las direcciones x, y. ....	38
Tabla III-9: Masas tributarias a los nodos de la losa del marco de un piso, considerando excentricidad, para sismo en x, y.....	42
Tabla III-10: Fuerzas equivalentes máximas aplicadas, desplazamientos nodales y reacciones basales del marco de un piso sometido a acción la sísmica en las direcciones x, y, mediante AME incluyendo torsión accidental en el algoritmo desarrollado en MATLAB. ....	43
Tabla III-11: Aceleraciones de piso mediante AME en las direcciones x, y, incluyendo torsión accidental, para la estructura de un piso con ETABS. ....	44

Tabla III-12: Resumen de respuesta de marco de un piso mediante AME sometida a acción sísmica en las direcciones x, y, incluyendo torsión accidental, con ETABS.....	45
Tabla III-13: Error absoluto relativo al comparar resultados obtenidos de la implementación del algoritmo en MATLAB con los obtenidos mediante ETABS para el marco de un piso sometido a acción sísmica en las direcciones x, y, incluyendo torsión accidental. ....	46
Tabla III-14: Diferencia relativa al comparar resultados de un análisis con y sin torsión accidental a través de ETABS para el marco de un piso sometido a acción sísmica en las direcciones x, y.....	47
Tabla IV-1: Colocación de barras en la estructura de cinco pisos. ....	53
Tabla IV-2: Colocación de elementos placa en la estructura de cinco pisos. ....	54
Tabla IV-3: Frecuencias circulares y períodos de la estructura de cinco pisos.....	55
Tabla IV-4: Resumen de propiedades modales para la estructura de cinco pisos.....	56
Tabla IV-5: Pseudoaceleración y desplazamientos máximos modales del edificio de cinco pisos para el espectro ENCh5. ....	58
Tabla IV-6: Fuerzas equivalentes y resumen de respuesta de edificio de cinco pisos mediante AME sometido a acción sísmica en las direcciones x, y, empleando el algoritmo desarrollado en MATLAB. ....	59
Tabla IV-7: Masas tributarias a los nodos de la losa del i-ésimo nivel del edificio de cinco pisos, considerando excentricidad, para sismo en x, y. ....	60
Tabla IV-8: Fuerzas equivalentes máximas aplicadas, desplazamientos nodales y reacciones basales del edificio de cinco pisos sometido a la acción sísmica en	

las direcciones x, y, mediante AME incluyendo torsión accidental en el algoritmo desarrollado en MATLAB. ....	61
Tabla IV-9: Aceleraciones de piso mediante AME en las direcciones x, y, incluyendo torsión accidental, para la estructura de cinco pisos con ETABS. ....	63
Tabla IV-10: Resumen de respuesta del edificio de cinco pisos mediante AME sometida a acción sísmica en las direcciones x, y, incluyendo torsión accidental, con ETABS.....	64
Tabla IV-11: Error absoluto relativo al comparar resultados obtenidos de la implementación del algoritmo en MATLAB con los obtenidos mediante ETABS para el edificio de cinco niveles sometido a acción sísmica en las direcciones x, y, incluyendo torsión accidental. ....	65
Tabla IV-12: Diferencia relativa al comparar resultados de un análisis con y sin torsión accidental a través de ETABS para el edificio de cinco pisos sometido a acción sísmica en las direcciones x, y.....	66
Tabla A-1: Matriz de rigidez de elemento tipo barra. ....	73
Tabla A-2: Matriz de rigidez de elemento tipo placa delgada. ....	74
Tabla A-3: Matriz de rigidez condensada para el marco de un piso, en kgf/cm. ....	78
Tabla A-4: Matriz de formas modales para el marco de un piso (adimensional). ....	79
Tabla A-5: Expansión modal del vector $s_x$ para el marco de un piso (kgf·s <sup>2</sup> /cm)....	80
Tabla A-6: Expansión modal del vector $s_y$ para el marco de un piso (kgf·s <sup>2</sup> /cm). ..	81

Tabla B-1: Código principal.....	82
Tabla B-2: Código para condensación estática. ....	91
Tabla B-3: Código para determinación de propiedades modales.....	92
Tabla B-4: Código para la creación del espectro de pseudoaceleración según NCh433.....	93
Tabla B-5: Código para la combinación modal CQC. ....	94

## ÍNDICE DE FIGURAS

	Pág.
Figura II-1: Esquema de planta para consideración de torsión accidental. ....	17
Figura II-2: Cuadro de diálogo dentro de ETABS 9.7.4 para definir la torsión accidental. ....	21
Figura III-1: Estructura de un piso considerada. ....	24
Figura III-2: Modelo del marco de un piso en ETABS. ....	25
Figura III-3: Áreas tributarias asignadas a los nodos de la losa de piso. ....	26
Figura III-4: Convención de signos empleada para la medición de los desplazamientos. ....	28
Figura III-5: Convención asumida para los GDL locales de los elementos. ....	28
Figura III-6: Configuración dentro de SAP2000 para obtener la matriz de rigidez...	30
Figura III-7: Espectro de pseudoaceleración (ENCh1) para suelo tipo C, zona sísmica III según NCh 433(2009) con $\xi = 5\%$ . ....	36
Figura III-8: Áreas tributarias asignadas a los nodos de la losa de piso considerando excentricidad por torsión accidental. ....	39
Figura III-9: Esquema del proceso realizado por ETABS para considerar la torsión accidental, para sismo en dirección x con excentricidad $e_y$ . ....	40

Figura III-10: Esquema del proceso equivalente al realizado por ETABS para considerar la torsión accidental, para sismo en dirección x con excentricidad ey.....	41
Figura III-11: Comparación de respuestas normalizadas para el marco de un piso, empleando procesos estáticos, dinámicos, y la modelación con ETABS.....	49
Figura IV-1: Estructura de cinco niveles.....	52
Figura IV-2: Espectro de pseudoaceleración (ENCh5) para suelo tipo C, zona sísmica III según NCh 433(2009) con $\xi = 5\%$ .....	57

## RESUMEN

En el análisis y diseño de edificaciones es necesario incluir todas las posibles acciones frente a las cuales se pudiera encontrar sometida una estructura a lo largo de su vida útil. Una de las acciones que mayor demanda ejerce sobre una estructura es la sísmica, ocasionando que los edificios presenten un comportamiento difícil de predecir. A pesar de la inherente incertidumbre, es necesario disponer de metodologías y procedimientos que permitan, con cierto nivel de confianza y seguridad, incluirlos en los análisis y poder obtener diseños adecuados.

Uno de los efectos que causa incertidumbre en el comportamiento de una edificación durante un evento sísmico es la torsión accidental. Es por esto que, en primer lugar, se analiza distintas normativas vigentes respecto al tema. Luego, se deduce el proceso que emplea el programa ETABS para considerar el efecto de la torsión accidental y se implementa este algoritmo en MATLAB. Finalmente, se resuelven ejemplos de análisis de estructuras incluyendo el efecto de la torsión accidental mediante el algoritmo desarrollado en MATLAB. La respuesta encontrada se contrasta con los resultados obtenidos a través del modelamiento con ETABS con la finalidad de validar dicho proceso.

Como resultado del presente trabajo, se verificó la forma en la que ETABS considera la torsión accidental conforme las normativas de análisis y diseño de edificios actuales. Siendo una metodología vigente, es probable que a corto plazo sea cambiada o mejorada gracias a las distintas investigaciones realizadas y otras que se encuentran en desarrollo.

## **ABSTRACT**

In the analysis and design of buildings it is necessary to include all possible actions to which a structure could be subjected to during its useful life. One of the actions that demands the most on a structure is the seismic action, causing buildings to present a behavior difficult to predict. Despite the inherent uncertainty, it is necessary to provide methodologies and procedures that allow, at a certain level of reliability and security, to include them in the analysis and to obtain adequate designs.

One of the effects that causes great uncertainty in the behavior of a building during a seismic event is the accidental torsion. Therefore, various current standards are analyzed in this document in order to address the issue. Then the process of ETABS software is deduced to consider the effect of accidental torsion, and it is implemented in a MATLAB algorithm. Finally, examples of structural analysis are solved including the effect of accidental torsion using the algorithm developed in MATLAB. The solutions found are contrasted with the results obtained through modeling with ETABS in order to validate this process.

As a result of the present work, the process of ETABS to consider the accidental torsion was verified according to the current provisions of analysis and design of buildings. Being a current methodology, it is probable that in the short term will be changed or improved thanks to the various researches that are being carried out and others that are under development.

## I. INTRODUCCIÓN

Las normativas de diseño sísmico de edificaciones tienen como finalidad asegurar que su estructura sea resistente, limitando los daños que se pudieran producir en elementos no estructurales y que no colapse frente a eventos sísmicos severos.

Para estimar los desplazamientos y esfuerzos sísmicos en edificios, la mayoría de los códigos de diseño sísmico consideran un comportamiento lineal elástico de los materiales, y permiten el empleo de análisis estático o dinámico. El método de análisis depende de las características de la estructura y de su importancia, así como de las condiciones del lugar de su emplazamiento. Por ejemplo, la norma Chilena de Diseño Sísmico de Edificios, NCh433 (2009), permite el uso del método de análisis estático a todas las estructuras convencionales de no más de 5 pisos y de no más de 20 metros de altura ubicadas en la zona del país menos sensible a excitaciones sísmicas.

Para tomar en cuenta la posibilidad de que se produzca torsión en la edificación durante un sismo, en función de las propiedades de la estructura y el suelo de cimentación, los códigos de diseño sísmico consideran la inclusión de la torsión accidental.

La torsión accidental de edificios se debe a la incertidumbre en la estimación de rigidez, ubicación de los centros de masa y a movimientos rotacionales en la base. Estudios anteriores (De la Llera y Chopra, 1994a, b) indican que entre las múltiples fuentes que pueden generar torsión accidental en edificios, las incertidumbres relacionadas con la ubicación del centro de masa y la rigidez de los elementos, son las que mayor incidencia. Demostrando que estas dos fuentes combinadas son responsables de más del 70% del total del incremento en la respuesta debido a la torsión accidental (De la Llera y Chopra, 1994a, b).

El presente trabajo tiene como finalidad analizar distintas metodologías consideradas en los códigos de diseño sísmicos de edificaciones para considerar la inclusión de la torsión accidental en el análisis sísmico. Existen hoy en día distintos programas computacionales

dedicados al análisis y diseño sísmico de estructuras, que son eficientes, precisos y que se han convertido en herramientas de uso cotidiano, como es el caso de Extended Three Dimensional Analysis of Building Systems (ETABS). Bajo este contexto, los objetivos específicos del presente trabajo son:

- Identificar la forma en que ETABS, versión 9.7.4, considera la torsión accidental.
- Realizar un proceso de validación de la metodología empleada por ETABS v.9.7.4.

Para cumplir estos objetivos se emplea el siguiente proceso:

- Revisión de la metodología empleada por algunas de las normativas aplicables al análisis y diseño sísmico de edificaciones convencionales. Las normativas a revisar son:
  - o Norma Chilena para el Diseño Sísmico de Edificios, NCh 433 de 2009, incluyendo el Decreto Supremo N° 61 de 2011.
  - o Norma Ecuatoriana de la Construcción referente al Peligro Sísmico y Diseño Sismorresistente, NEC-SE-DS de 2014.
  - o Norma Norteamericana, Minimum Design Loads for Buildings and Other Structures, ASCE/SEI 7-10 de 2010.
  - o Norma Europea correspondiente al Eurocódigo 8: Design Of Structures For Earthquake Resistance, Part 1: General rules, seismic actions and rules for buildings, EN 1998-1:2004.
- Revisión de la metodología empleada por el programa ETABS para tomar en cuenta la torsión accidental en un análisis sísmico.
- Creación de un modelo que permita validar el proceso seguido por ETABS, frente a las consideraciones detalladas por las distintas normativas de análisis y diseño de estructuras.

## **II. ESTADO DEL ARTE**

En esta sección se resume la metodología propuesta por distintas normativas de diseño sísmico para incluir la torsión accidental en el diseño sísmico de edificios. Adicionalmente, se resumen aspectos relevantes del análisis sísmico de edificios.

### **II.1 Norma Chilena NCh 433 y DS N° 61**

El ítem 6.1.1 de la norma NCh433 (2009) indica que, tanto para el análisis estático como para el análisis modal espectral, los modelos de la estructura como mínimo deben considerar tres grados de libertad por piso: dos desplazamientos horizontales y la rotación del piso en torno a un eje vertical.

El ítem 6.1.2 de la NCh 433 indica que los efectos de torsión accidental en el diseño de los elementos estructurales se pueden despreciar si al realizar un análisis modal espectral, considerando dicho efecto, se obtienen variaciones de los desplazamientos horizontales en todos los puntos de las plantas del edificio que son iguales o menores al 20% respecto de los desplazamientos resultantes del modelo sin considerar torsión accidental.

La NCh433 indica que en un análisis modal espectral se deben considerar todos los modos, ordenados según valores crecientes de las frecuencias propias, que sean necesarios para que la suma de las masas equivalentes para cada una de las dos acciones sísmicas sea mayor o igual a un 90% de la masa sísmica total.

Para considerar la torsión accidental, la sección 6.3.4 de la NCh433 (2009) permite dos alternativas:

- a) Desplazar los centros de masas de cada piso transversalmente en un 5% de la dimensión de piso perpendicular a la dirección de acción del sismo.
- b) Aplicar momentos de torsión estáticos en cada nivel, obtenidos como la variación del esfuerzo de corte combinado en ese nivel por una excentricidad accidental dada por:

$$\pm 0.1b_{ky} Z_k / h , \text{ para sismo según la dirección X;} \quad (2.1)$$

$$\pm 0.1b_{kx} Z_k / h , \text{ para sismo según la dirección Y;} \quad (2.2)$$

donde,  $Z_k$  es la altura del nivel  $k$  sobre la base,  $h$  es la altura total del edificio sobre la base,  $b_{ky}$ ,  $b_{kx}$  son las dimensiones de la planta de piso conforme se muestra en la Figura II-1.

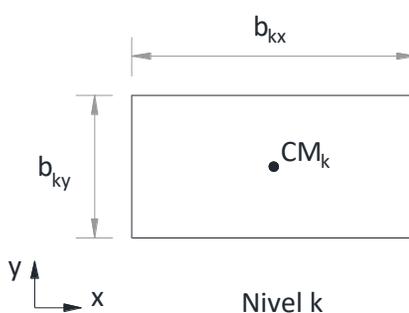


Figura II-1: Esquema de planta para consideración de torsión accidental.

Las excentricidades en cada nivel se deben tomar con igual signo para cada dirección de análisis. En consecuencia, para cada dirección se requieren dos casos con torsión accidental. Los resultados obtenidos con estas excentricidades se deben adicionar a los de un análisis modal espectral considerando los centros de masas en su ubicación natural.

## II.2 Norma Ecuatoriana NEC-SE-DS

La sección 4.5.2, de la NEC-SE-DS (2014) indica que el método de diseño basado en las fuerzas (DBF) es obligatorio. El principal objetivo de este método es estimar las fuerzas sísmicas horizontales para las cuales se debe diseñar la estructura. Este método puede aplicarse ya sea por análisis estático o un análisis dinámico, en función de las características estructurales de la edificación.

Dentro de los análisis dinámicos la norma NEC-SE-DS (2014) permite dos posibilidades: el modal espectral y el análisis tiempo-historia.

Dentro del literal e. de la sección 6.2.2 de la NEC-SE-DS (2014) se detalla que en un análisis modal espectral se deben emplear todos los modos que tengan influencia significativa en la respuesta de la estructura. Estos modos son aquellos cuya suma de sus masas modales sea al menos el 90% de la masa total de la estructura en cada una de las direcciones horizontales consideradas.

Para tomar en cuenta posibles efectos por torsión accidental se debe considerar un desplazamiento del centro de masa en una distancia igual al 5% de la máxima dimensión del piso que es perpendicular a la dirección de actuación del sismo, según se detalla en el numeral 6.3.6 de la NEC-SE-DS (2014). Si existe irregularidad de planta, la cual se mide a través del coeficiente de regularidad en planta según la tipología de la edificación, los efectos de torsión accidental en cada nivel deben amplificarse por un factor  $A_x$ , calculado mediante:

$$1 \leq A_x = \left( \frac{\delta_{\max}}{1.2\delta_{prom}} \right)^2 \leq 3 \quad (2.3)$$

Siendo  $\delta_{\max}$  el desplazamiento máximo en el nivel  $x$ , y  $\delta_{prom}$  el promedio de desplazamientos de los puntos extremos de la estructura en el nivel  $x$ .

### **II.3 Norma Norteamericana ASCE/SEI 7–10**

La norma ASCE/SEI 7-10 (2010), en el numeral 12.6, indica que los procedimientos a emplear para el análisis sísmico son: fuerzas equivalentes (análisis estático), análisis modal espectral (AME), y análisis tiempo-historia. El tipo de análisis permitido depende de la tipología estructural y las condiciones del sitio de emplazamiento.

La sección 12.9.1 de la norma ASCE/SEI 7-10 indica que para el análisis modal espectral, se debe considerar un número suficiente de modos tal que la masa modal de su combinación sea al menos el 90% de la masa total en cada dirección de análisis.

Para considerar la torsión accidental, los numerales 12.9.5 y 12.8.4.2 de la norma ASCE/SEI 7-10, indica que se debe desplazar el centro de masa a cada lado de su posición original una distancia igual al 5% de la dimensión de piso normal a la dirección de actuación sísmica considerada. En caso de incluir simultaneidad de sismo en las dos direcciones horizontales principales, es suficiente considerar dicho desplazamiento en la dirección que produzca el mayor efecto.

Esta norma dentro de su numeral 12.8.4.3, también considera una amplificación del efecto por torsión accidental en función de la tipología de la edificación. La expresión propuesta es la que se indica mediante en la ecuación (2.3).

#### **II.4 Norma Europea EN 1998-1:2004**

La sección 4.3.3 de la norma EN 1998-1 (2004) indica las metodologías de análisis lineal que se pueden realizar para determinar la respuesta sísmica de edificaciones. Esta norma propone el análisis estático y el análisis modal espectral. Adicionalmente, esta norma propone como alternativa el análisis “pushover” y tiempo-historia no-lineal.

El numeral 4.3.3.3.1 de la norma EN 1998-1 (2004) indica que se deben tomar en cuenta todos los modos que incidan significativamente en la respuesta de la estructura. Esto se cumple cuando ocurre alguna de las siguientes condiciones, en cada dirección de acción sísmica:

- la suma de las masas modales efectivas de los modos considerados es superior o igual al 90% de la masa total,
- se incluyen en el análisis todos los modos cuya masa modal efectiva es superior al 5% de la masa total.

La sección 4.3.3.3 y 4.3.2 de la norma EN 1998-1 (2004) indica que los efectos de torsión accidental se consideran desplazando el centro de masa una distancia igual al 5% de la dimensión de piso que es perpendicular a la dirección considerada para el sismo en ambos sentidos, con un mismo signo para todos los pisos. Dichas acciones adicionales se traducen en momentos torsionales actuantes en cada piso.

En base a lo expuesto anteriormente, se puede concluir que las cuatro normativas (Chilena, Ecuatoriana, Norteamericana y Europea), consideran la torsión accidental mediante una metodología común, que consiste en desplazar el centro de masas en un 5% de la dimensión de piso que es normal a la dirección de análisis. Recalcando que la normativa Chilena adicionalmente permite aplicar momentos torsores estáticos en cada piso para considerar el efecto de la torsión accidental.

## **II.5 Torsión accidental con ETABS**

La versión del programa ETABS empleada en este trabajo es la 9.7.4 del 2011, que corresponde a la licencia disponible en la Pontificia Universidad Católica de Chile. Para considerar la torsión accidental se requiere definir un caso de carga para análisis modal espectral, dentro del cual se asigna el valor de la excentricidad del desplazamiento del centro de masa en cada dirección.

En ETABS 9.7.4 la excentricidad se define como un porcentaje de la dimensión de piso en cada dirección, tal como se muestra en la Figura II-2. Es necesario definir un solo valor de excentricidad positiva, ya que el programa entrega la envolvente de respuesta considerando el desplazamiento del centro de masa a cada lado de su posición original.

**Response Spectrum Case Data**

**Spectrum Case Name**

Structural and Function Damping

Damping

Modal Combination

CQC  SRSS  ABS  GMC

f1  f2

Directional Combination

SRSS  ABS Orthogonal SF

Input Response Spectra

Direction	Function	Scale Factor
U1	<input type="text"/>	<input type="text"/>
U2	<input type="text"/>	<input type="text"/>
UZ	<input type="text"/>	<input type="text"/>

Excitation angle

Eccentricity

Ecc. Ratio (All Diaph.)

Override Diaph. Eccen.

Figura II-2: Cuadro de diálogo dentro de ETABS 9.7.4 para definir la torsión accidental.

En versiones anteriores al 2013, tal como lo indica su manual, ETABS realiza el siguiente proceso para tomar en cuenta la torsión accidental:

- Obtención de la respuesta sísmica de la estructura mediante análisis modal espectral, encontrando las aceleraciones traslacionales de cada nodo de piso.
- Determinación de las fuerzas resultantes del producto de dichas aceleraciones por la masa tributaria correspondiente a cada nodo de piso.

- Aplicación del máximo valor absoluto del momento torsor obtenido como el producto de dichas fuerzas por la excentricidad en la ubicación de cada nodo.
- Finalmente, la respuesta del análisis modal espectral se suma con la obtenida de la aplicación de los momentos torsos del paso anterior.

En versiones posteriores al 2015, ETABS calcula la torsión de piso como la diferencia de cortante entre dos pisos adyacentes por la excentricidad a lo largo de las direcciones X e Y. Este proceso entrega resultados menos conservadores, según detalla el manual respectivo, pero este procedimiento tiene relación con la segunda alternativa para considerar torsión accidental conforme la normativa Chilena NCh 433 (2009).

### III. VALIDACIÓN DE ESTRUCTURA DE UN PISO

En esta sección se valida el procedimiento empleado por ETABS v9.7.4 para considerar la torsión accidental. El procedimiento se verifica utilizando una estructura de un piso. El espectro usado para realizar el análisis modal espectral del presente modelo es el de la norma NCh 433 (2009), asumiendo suelo tipo C en la zona 3.

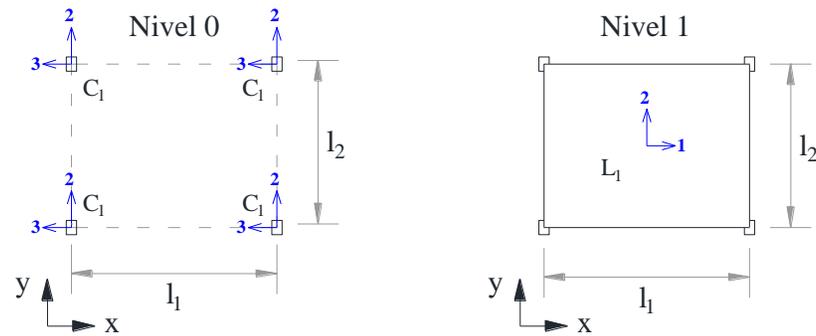
En primer lugar se describen las propiedades físicas, mecánicas y geométricas de la estructura a analizar, definiendo las matrices de masa y rigidez de la estructura, necesarias para realizar el análisis modal espectral. Con esta información se procede a incluir el efecto de torsión accidental conforme el proceso indicado por ETABS, y resolver la estructura mediante:

- a) Un algoritmo escrito dentro del programa MATLAB.
- b) Directamente empleando ETABS.

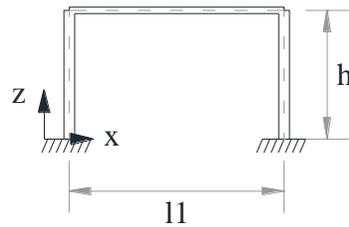
Finalmente se contrastan los resultados obtenidos con la finalidad de validar el proceso que internamente realiza ETABS para considerar la torsión accidental conforme lo indican los distintos códigos para el análisis y diseño de edificaciones.

#### III.1 Características y Propiedades de la Estructura

La estructura de un piso empleada para el análisis es de hormigón armado, Esta consiste en una losa ( $L_1$ ) de espesor  $t = 15$  cm, apoyada sobre cuatro columnas rectangulares ( $C_1$ ) de sección  $d_3 = 25$  cm por  $d_2 = 35$  cm que se asumen empotradas en la base. Se asume que la estructura posee un amortiguamiento intrínseco ( $\xi$ ) del 5% en todos los modos. La distancia  $l_1$  entre el eje de columnas en la dirección del eje  $x$  es de 500 cm, mientras que la distancia  $l_2$  en la dirección del eje  $y$  es de 400 cm. La altura de las columnas medida al centro de la losa es de  $h = 300$  cm. La estructura descrita se muestra en la Figura III-1, indicando los ejes locales de los elementos en planta, y una elevación del marco de un piso.



a) Geometría en planta.



b) Geometría de elevación frontal.

Figura III-1: Estructura de un piso considerada.

La estructura se modela considerando elementos tipo barra para las columnas y elementos tipo placa delgada (thin shell) para la losa, lo que implica que no se considera el efecto de corte en la dirección normal al plano de la losa. Se despreció la deformación de corte en las columnas y se consideró diafragma semirrígido de piso. Estos supuestos fueron asumidos con la finalidad de simplificar el modelo para la revisión del proceso que realiza ETABS al considerar la torsión accidental dentro de un análisis modal espectral. La Figura III-2, muestra nominación de nodos, columnas y losa consideradas para la estructura del marco de un piso.

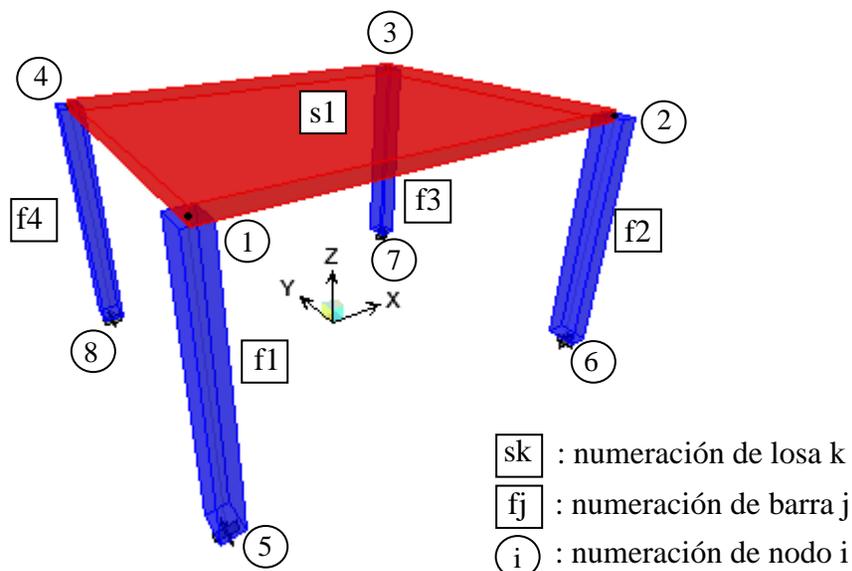


Figura III-2: Modelo del marco de un piso en ETABS.

Los materiales se asumen homogéneos e isotrópicos, aunque los elementos están compuestos por concreto con acero de refuerzo. Se asume que las propiedades mecánicas del concreto reforzado son las que se muestran en la Tabla III-1.

Tabla III-1: Propiedades mecánicas asumidas para el concreto reforzado.

Propiedad	Valor	Unidad
Coefficiente de Poisson ( $\nu$ )	0.25	
Densidad ( $\rho$ )	2500	kg/m <sup>3</sup>
Módulo de elasticidad ( $E$ )	21000	Mpa

Como masa sísmica solo se considera la masa de la losa, asumiendo que las columnas son elementos sin masa. En el programa ETABS la masa de la losa se puede asignar de dos maneras equivalentes: 1) asignando directamente la densidad del material al elemento losa, o 2) asignando una carga distribuida por unidad de área cuya resultante es igual al peso de la losa. En el presente trabajo la masa se asigna con la primera opción, de forma que el programa calcule la masa de la losa en función de sus dimensiones.

Para realizar el análisis modal espectral, ETABS distribuye la masa sísmica a cada nodo de la losa conforme el área tributaria correspondiente, según las tres direcciones globales de traslación. Para una discretización dada de la losa rectangular, el área tributaria correspondiente a cada nodo se encuentra delimitada por las líneas que unen el centroide de cada elemento área con el punto medio de sus lados. Tomando a la losa del presente ejemplo como un solo elemento rectangular, el área tributaria correspondiente a cada nodo se muestra en la Figura III-3.

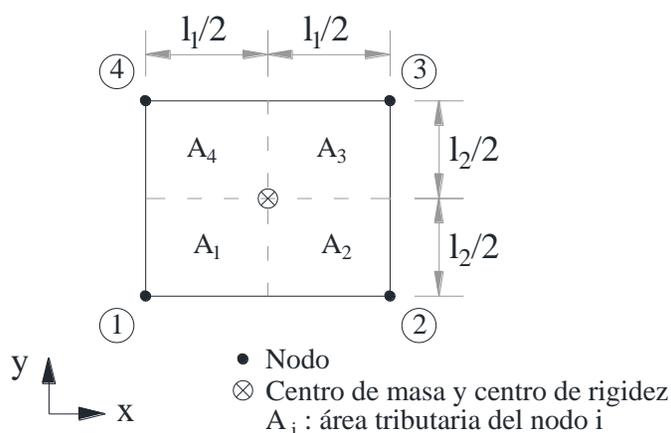


Figura III-3: Áreas tributarias asignadas a los nodos de la losa de piso.

Así, el área tributaria correspondiente a cada nodo es  $A_1 = \dots = A_4 = (l_1 \cdot l_2) / 4 = A / 4$ . Por tanto, la masa nodal asignada a las tres direcciones traslacionales principales,  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , es  $m_1 = \dots = m_4 = (A / 4 \cdot t) \cdot \rho = 1875 \text{ kg} = 1.912 \text{ kgf} \cdot \text{s}^2 / \text{cm}$ , dando un total para la estructura de  $\sum m_i = 7500 \text{ kg} = 7.648 \text{ kgf} \cdot \text{s}^2 / \text{cm}$ . Expresando matricialmente las masas asignadas al nodo  $i$ -ésimo en las direcciones traslacionales  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , siendo  $\mathbf{I}$  la matriz identidad, se tiene:

$$\mathbf{M}_i = m_i \cdot \begin{matrix} & \begin{matrix} x & y & z \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & = m_i \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{matrix} \quad (3.1)$$

Como el sistema tiene cuatro nodos con masa, la matriz de masa del sistema es de 12x12, y está definida como:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \cdots & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{M}_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \mathbf{M}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \cdots & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{M}_4 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Para obtener la matriz de rigidez de la estructura del marco de un piso compatible con los mismos doce grados de libertad traslacionales de la matriz de masas descrita en (3.2), se requiere conocer las matrices de rigidez de los elementos tipo barra y la matriz de rigidez de la placa delgada. A continuación se describe el proceso empleado para la determinación de la matriz de rigidez de cada uno de los elementos empleados.

Los procesos descritos para la obtención de las matrices de rigidez de dichos elementos son generales, y la deducción de la formulación específica no es objeto del presente trabajo. Sin embargo, se describe el procedimiento para obtener la matriz de rigidez con la finalidad de interpretar adecuadamente los resultados entregados por el programa ETABS, y validar el procedimiento mediante un algoritmo desarrollado para MATLAB.

Seis grados de libertad (GDL) fueron considerados para cada nodo de la estructura, tres rotacionales y tres traslacionales, cuyos desplazamientos respecto a los ejes globales se miden conforme la convención de signos mostrada en la Figura III-4. El marco de un piso tiene ocho nodos, por tanto, el número total de GDL es  $n_t = 8 \cdot 6 = 48$ . Los GDL de las bases de las cuatro columnas (nodos 5 a 8), están restringidos. En consecuencia, los GDL restringidos son  $n_r = 4 \cdot 6 = 24$ . Así, los GDL libres son  $n_l = n_t - n_r = 24$ , correspondientes a los nodos 1 a 4. Dado que la masa nodal actúa únicamente en las tres direcciones traslacionales, entonces el número de GDL con masa de los nodos 1 a 4 son  $n_m = 4 \cdot 3 = 12$ . Por tanto, la estructura tiene en total doce formas modales, y la matriz de rigidez de la estructura es de 12x12.

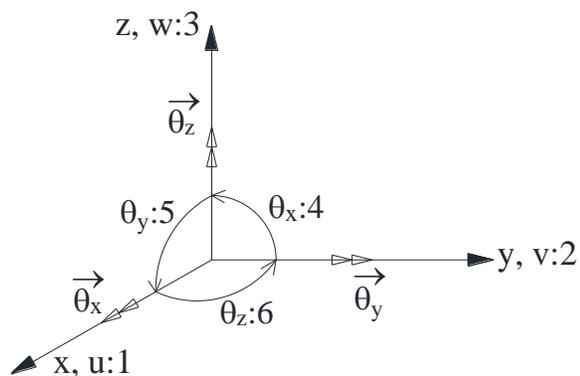


Figura III-4: Convención de signos empleada para la medición de los desplazamientos.

Localmente los GDL de los elementos barra y área se consideran conforme la convención mostrada en la Figura III-5.

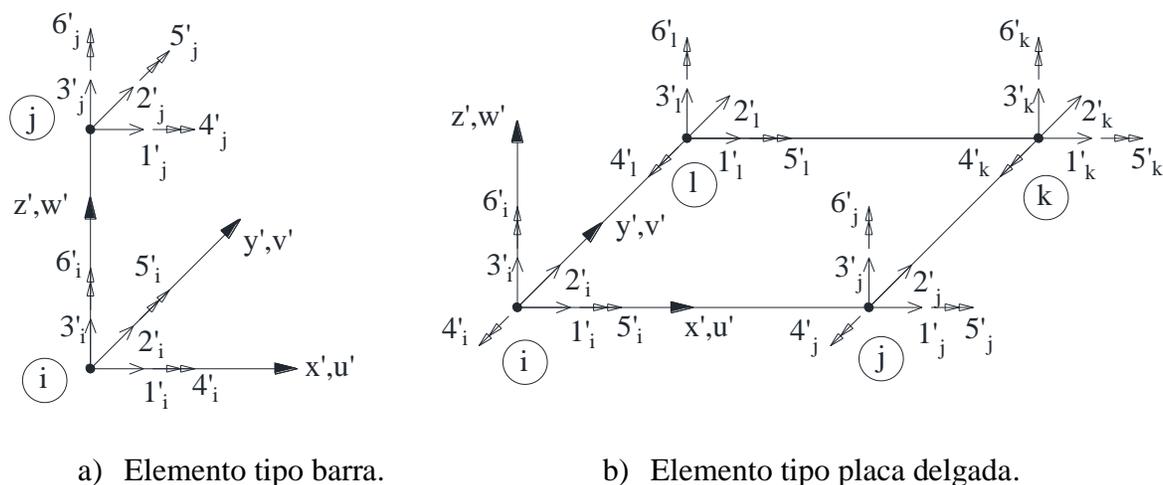


Figura III-5: Convención asumida para los GDL locales de los elementos.

Para el elemento tipo barra, la matriz de rigidez incluye los efectos axial, flexural y de torsión en forma desacoplada. En la Tabla III-2 se resume los GDL locales que intervienen en la determinación de la matriz de rigidez de cada efecto (véase Figura III-5) en coordenadas locales.

Tabla III-2: Efectos considerados en los elementos tipo barra.

Efecto	GDL local	Matriz de Rigidez	
		Nomenclatura	Dimensión
Axial	(3')i, (3')j	$\mathbf{K}'_a^{(e)}$	2x2
Flexión y'y'	(1',5')i, (1',5')j	$\mathbf{K}'_{by'}^{(e)}$	4x4
Flexión x'x'	(2',4')i, (2',4')j	$\mathbf{K}'_{bx'}^{(e)}$	4x4
Torsión	(6')i, (6')j	$\mathbf{K}'_t^{(e)}$	2x2

Considerando los aportes de rigidez axial, flexurales y de torsión de la Tabla III-2, se obtiene una matriz de rigidez local de 12x12 para el elemento tipo barra:

$$\mathbf{K}'_a^{(e)} + \mathbf{K}'_{by'}^{(e)} + \mathbf{K}'_{bx'}^{(e)} + \mathbf{K}'_t^{(e)} \Rightarrow \mathbf{K}'_f^{(e)} \quad (3.3)$$

en donde las columnas de izquierda a derecha y las filas de arriba hacia abajo de dicha matriz corresponden a los GDL (1' a 6')i, (1' a 6')j. La matriz de rigidez en el sistema global xyz, cuyas columnas de izquierda a derecha y filas de arriba hacia abajo corresponden a los GDL globales (1 a 6)i, (1 a 6)j, se obtiene como:

$$\mathbf{T}_f^{T(e)} \mathbf{K}'_f^{(e)} \mathbf{T}_f \Rightarrow \mathbf{K}_f^{(e)} \quad (3.4)$$

siendo  $\mathbf{T}_f^{(e)}$  la matriz de transformación del elemento que permite expresar los GDL locales según la Figura III-5 en términos de los GDL globales de la Figura III-4.

Dado que es necesario emplear en los análisis del presente trabajo las mismas matrices de rigidez elementales que usa ETABS, en la Tabla A-1 del Anexo A, se muestra la matriz de rigidez en coordenadas globales para el elemento tipo barra entre los nodos i, j. Para poder tener acceso a esta matriz de rigidez, se modeló el elemento tipo barra dentro del programa SAP2000 versión 19, empleando la configuración de análisis mostrada en la Figura III-6. La matriz de rigidez de la barra se obtuvo de manera indirecta a través de SAP2000 debido a que este programa permite entregar esta información en un archivo de texto, y emplea la

misma formulación que ETABS como se puede revisar en sus manuales correspondientes, mientras que ETABS no lo permite.

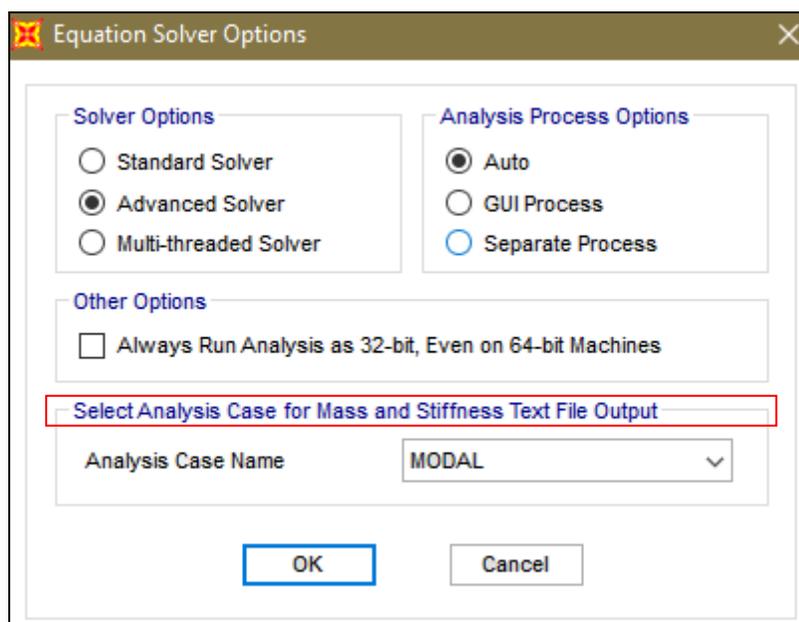


Figura III-6: Configuración dentro de SAP2000 para obtener la matriz de rigidez.

El elemento placa delgada, empleado para la losa, incluye los efectos axial, flexural y torsión, y desprecia el efecto del corte normal al plano de la losa. Asumiendo que dichos comportamientos no se encuentran acoplados, en la Tabla III-3 se detallan los GDL locales que intervienen en el comportamiento tipo membrana y placa flexural de la losa.

Tabla III-3: Efectos considerados en los elementos tipo placa delgada.

Comportamiento	GDL locales	Matriz de Rigidez	
		Nomenclatura	Dimensión
Tipo membrana	(1', 2', 6')i, (1', 2', 6')j, (1', 2', 6')k, (1', 2', 6')l	$K'_m{}^{(e)}$	12x12
Placa flexural	(3', 4', 5')i, (3', 4', 5')j, (3', 4', 5')k, (3', 4', 5')l	$K'_b{}^{(e)}$	12x12

Considerando los aportes del comportamiento tipo membrana y tipo flexural, tal como se detalla en la Tabla III-3, la matriz de rigidez de la placa delgada de 24x24 es:

$$\mathbf{K}'_m{}^{(e)} + \mathbf{K}'_b{}^{(e)} \Rightarrow \mathbf{K}'_{sl}{}^{(e)} \quad (3.5)$$

en donde las columnas de izquierda a derecha y las filas de arriba hacia abajo de la matriz se corresponden con los GDL (1' a 6')i, (1' a 6')j, (1' a 6')k, (1' a 6')l en coordenadas locales. La matriz de rigidez de la placa delgada en el sistema global xyz, cuyas columnas de izquierda a derecha y filas de arriba hacia abajo se corresponden con los GDL globales (1 a 6)i, (1 a 6)j, (1 a 6)k, (1 a 6)l, se obtiene como:

$$\mathbf{T}_{sl}^{T(e)} \mathbf{K}'_{sl}{}^{(e)} \mathbf{T}_{sl} \Rightarrow \mathbf{K}_{sl}{}^{(e)} \quad (3.6)$$

siendo  $\mathbf{T}_{sl}{}^{(e)}$  la matriz de transformación que permite expresar la matriz de rigidez del elemento en coordenadas locales (véase Figura III-5) en ejes globales.

En forma análoga al caso de las columnas, el elemento tipo placa delgada de la losa fue modelado en SAP2000 para obtener la matriz de rigidez de dicho elemento. La matriz de rigidez del elemento tipo placa delgada a emplear en los análisis del presente trabajo se detalla en la Tabla A-2 del Anexo A.

Con las matrices de rigidez de las columnas y la losa se realiza un algoritmo en MATLAB, cuyo detalle se encuentra en Anexo B del presente trabajo, para realizar el siguiente proceso:

- Lectura de las propiedades mecánicas, físicas y geométricas de la estructura. Lectura de las matrices de rigidez de los elementos tipo barra y placa delgada empleados por ETABS.
- Determinación de las propiedades modales de la estructura.

- Creación del espectro de pseudoaceleración.
- Análisis modal espectral, e inclusión del efecto de la torsión accidental según metodología indicada por ETABS.

A continuación se detallan los dos primeros pasos descritos anteriormente, mientras que en las secciones siguientes del presente documento se detallan los pasos restantes.

La Tabla III-4a) y Tabla III-4b) muestran la correspondencia de los nodos locales con los nodos globales de la estructura para los elementos tipo barra y placa delgada, respectivamente.

Tabla III-4: Colocación de los elementos en la matriz de rigidez del marco de un piso.

a) Elementos barra

Elemento	Nodo	
	i	j
f1	5	1
f2	6	2
f3	7	3
f4	8	4

b) Elementos placa delgada

Elemento	Nodo			
	i	j	k	l
s1	1	2	3	4

De esta manera, la matriz de rigidez de la estructura se obtiene ensamblando los aportes correspondientes de los cuatro elementos barra y de la placa obteniendo una matriz de 48x48:

$$\mathbf{K}_f^{(f1)} + \mathbf{K}_f^{(f2)} + \mathbf{K}_f^{(f3)} + \mathbf{K}_f^{(f4)} + \mathbf{K}_{sl}^{(s1)} \Rightarrow \mathbf{K}_T \quad (3.7)$$

Dado que los nodos 5 a 8 de los apoyos se encuentran empotrados, los GDL de dichos nodos se anulan, obteniendo la matriz de rigidez reducida  $\mathbf{K}_R$  de la estructura de 24x24. Sabiendo que la masa de la estructura se asigna a los nodos de la losa, únicamente los GDL

traslacionales dispondrán de masa asociada. Aplicando condensación estática sobre los GDL rotacionales de la matriz de rigidez reducida para dejarla en términos de los GDL traslacionales, se obtiene la matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  de 12x12 del sistema, :

$$\mathbf{K}_T \Rightarrow \text{condición apoyo} \Rightarrow \mathbf{K}_R \Rightarrow \text{condensación estática} \Rightarrow \mathbf{K} \quad (3.8)$$

tal como se detalla en el código descrito en la Tabla B-1 y Tabla B-2 del Anexo B. La matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  se muestra en la Tabla A-3 del Anexo A.

Empleando la matriz de masa (3.2) y la matriz de rigidez (3.8) de la estructura se pueden encontrar los “n” modos de la estructura de un piso resolviendo el siguiente problema de x valores y vectores propios:

$$\mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\varphi}_n = \omega_n^2 \cdot \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\varphi}_n \quad (3.9)$$

en donde,  $\omega_n$  es la frecuencia circular natural de vibración y  $\boldsymbol{\varphi}_n$  es la forma modal natural de vibración. En la Tabla III-5 se resumen las frecuencias circulares y los períodos naturales de la estructura. Los códigos MATLAB utilizados para realizar estos cálculos se detallan en el anexo B.

Tabla III-5: Frecuencias circulares y períodos del marco de un piso.

<b>Modo</b>	1	2	3	4	5	6
$\omega_n$ (rad/s)	38.54462	40.01481	52.13184	571.54761	572.06405	572.96491
$T_n$ (s)	0.16301	0.15702	0.12052	0.01099	0.01098	0.01097
<b>Modo</b>	7	8	9	10	11	12
$\omega_n$ (rad/s)	573.54249	670.16773	837.60173	1111.38538	1174.35015	1562.48700
$T_n$ (s)	0.01096	0.00938	0.00750	0.00565	0.00535	0.00402

Se define a  $\Phi$  como la matriz de formas modales, cuyas columnas son los vectores de los modos de vibrar  $\varphi_n$ . En la Tabla A-4 del Anexo A se detalla la matriz de formas modales del marco de un piso, normalizada respecto a la masa.

Siendo el vector de incidencia de la acción sísmica  $\mathbf{t}_d$  en una determinada dirección traslacional, a continuación se definen las siguientes propiedades modales:

$$\varphi_n^T \mathbf{M} \varphi_n = M_n, \text{ masa modal} \quad (3.10)$$

$$\varphi_n^T \mathbf{M} \mathbf{t}_d = L_{nd}, \text{ masa de aporte en la dirección de excitación} \quad (3.11)$$

$$\frac{L_{nd}}{M_n} = \Gamma_{nd}, \text{ factor de participación modal} \quad (3.12)$$

$$\frac{L_{nd}^2}{M_n} = M_{nd}^*, \text{ masa modal efectiva en la dirección de análisis} \quad (3.13)$$

$$\bar{M}_d = \sum_n M_{nd}^*, \text{ masa total efectiva en la dirección de análisis} \quad (3.14)$$

$$\frac{M_{nd}^*}{\bar{M}_d} 100 = p M_{nd}^*, \text{ porcentaje de la masa modal efectiva} \quad (3.15)$$

$$\mathbf{M} \varphi_n \Gamma_{nd} = \mathbf{s}_{nd}, \text{ expansión modal del vector de "fuerzas" } \mathbf{s}_d = \mathbf{M} \mathbf{t}_d \quad (3.16)$$

Para una excitación sísmica lateral en las direcciones principales x o y, los vectores de incidencia para el marco de un piso, respectivamente son:

$$\mathbf{t}_x = [1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]^T \quad (3.17)$$

$$\mathbf{t}_y = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]^T \quad (3.18)$$

En la Tabla III-6 se resumen las propiedades modales para la estructura de un piso, para la acción de la excitación sísmica en las direcciones x e y. Estas propiedades se obtuvieron del algoritmo en MATLAB (Tabla B-3).

Tabla III-6: Resumen de propiedades modales para la estructura de un piso.

Modo	$L_n$ (kgf·s <sup>2</sup> /cm)		$\Gamma_n$ ( )		$\rho M_n^*$ (%)	
	x	y	x	y	x	y
1	-2.7655	0.0000	-2.7655	0.0000	99.9995	0.0000
2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.0000	2.7654	0.0000	2.7654	0.0000	99.9975
4	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5	0.0062	0.0000	0.0062	0.0000	0.0005	0.0000
6	0.0000	0.0137	0.0000	0.0137	0.0000	0.0025
7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
8	0.0000	-0.0006	0.0000	-0.0006	0.0000	0.0000
9	-0.0003	0.0000	-0.0003	0.0000	0.0000	0.0000
10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
				$\Sigma$	100.0000	100.0000

La expansión modal de los vectores de “fuerzas”  $s_x$  y  $s_y$  para una incidencia sísmica en las direcciones x e y se detallan en la Tabla A-5 y Tabla A-6, respectivamente.

Cabe recalcar que las propiedades modales determinadas a partir del algoritmo desarrollado en MATLAB son coincidentes completamente con los resultados correspondientes determinados a través de ETABS, como se demuestra a través de los resultados obtenidos en la sección siguiente.

### III.2 Análisis Modal Espectral del Marco de un Piso

Empleando la norma Chilena NCh 433 (2009) se propone el espectro de pseudoaceleración a emplear en el análisis de la estructura. Se asume un suelo tipo C en la zona sísmica 3, para el emplazamiento del marco de un piso, cuyo período fundamental de 0.163 s (Tabla III-5). A través del algoritmo implementado en MATLAB (Tabla B-4 del Anexo B), se define el correspondiente espectro de pseudoaceleración (ENCh1) mostrado en la Figura III-7, para un amortiguamiento  $\xi = 5\%$ .

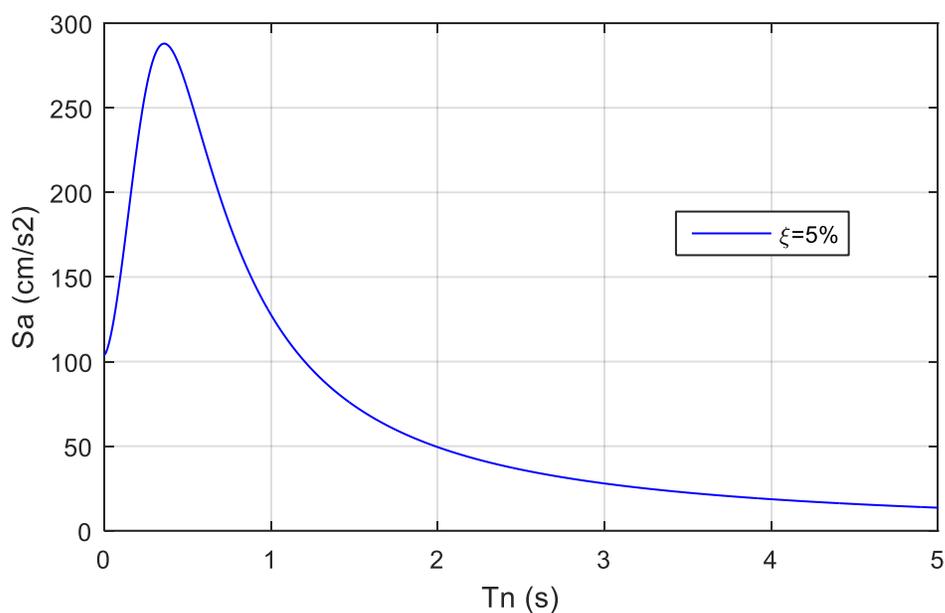


Figura III-7: Espectro de pseudoaceleración (ENCh1) para suelo tipo C, zona sísmica III según NCh 433(2009) con  $\xi = 5\%$ .

El espectro de pseudoaceleración (ENCh1) de la Figura III-7 se emplea para definir la excitación sísmica solicitante para cada una de las dos direcciones principales x, y. Empleando el algoritmo de la Tabla B-1 del Anexo B implementado en MATLAB, los valores de pseudoaceleración y desplazamiento máximo correspondientes a los modos naturales de vibración del marco de un piso se indican en la Tabla III-7.

Tabla III-7: Pseudoaceleración y desplazamientos máximos modales del marco de un piso para el espectro ENCh1.

<b>Modo</b>	1	2	3	4	5	6
<b>Dirección</b>	x, y					
<b>S<sub>an</sub> (cm/s<sup>2</sup>)</b>	201.0383	196.3234	167.5586	105.2190	105.2164	105.2120
<b>S<sub>dn</sub> (cm)</b>	0.135317	0.122611	0.061654	0.000322	0.000322	0.000320

<b>Modo</b>	7	8	9	10	11	12
<b>Dirección</b>	x, y					
<b>S<sub>an</sub> (cm/s<sup>2</sup>)</b>	105.2091	104.8832	104.6445	104.4091	104.3705	104.2012
<b>S<sub>dn</sub> (cm)</b>	0.000320	0.000234	0.000149	0.000085	0.000076	0.000043

Mediante un análisis modal espectral (AME), se puede encontrar la respuesta máxima del modo  $n$  de la estructura frente a una excitación sísmica solicitante en la dirección  $d$ . Particularmente los desplazamientos nodales, aceleraciones nodales, fuerzas equivalentes en los nodos, reacciones y momentos basales se obtienen respectivamente como:

$$\mathbf{u}_{nd} = \boldsymbol{\varphi}_{nd} \Gamma_{nd} S_{dnd} \quad (3.19)$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_{nd} = \boldsymbol{\varphi}_{nd} \Gamma_{nd} S_{and} \quad (3.20)$$

$$\mathbf{f}_{snd} = \mathbf{K} \mathbf{u}_{nd} = (\mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_{nd} \Gamma_{nd}) S_{and} = \mathbf{s}_{nd} S_{and} \quad (3.21)$$

$$R_{xbnd} = \sum \mathbf{f}_{xsnd}, \quad R_{ybnd} = \sum \mathbf{f}_{ysnd}, \quad R_{zbnd} = \sum \mathbf{f}_{zsnd} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} M_{xbnd} &= \sum \mathbf{f}_{snd}(i) \cdot d_{xi}, & M_{ybnd} &= \sum \mathbf{f}_{snd}(i) \cdot d_{yi}, \\ M_{zbnd} &= \sum \mathbf{f}_{snd}(i) \cdot d_{zi} \end{aligned} \quad (3.23)$$

en donde,  $\mathbf{f}_{xsnd}$ ,  $\mathbf{f}_{ysnd}$ ,  $\mathbf{f}_{zsnd}$ , son las componentes modales en las direcciones x, y, z del vector de fuerzas equivalentes, mientras que,  $d_{xi}$ ,  $d_{yi}$ ,  $d_{zi}$  son las distancias de las fuerzas modales a los ejes x, y, z respectivamente.

El marco de un piso se somete las acciones sísmicas actuando independientemente en cada una de las dos direcciones principales x e y, definidas a través del espectro de pseudoaceleración ENCh1. Empleando el código de la Tabla B-1 del Anexo B, se realiza el AME del marco de un piso, usando una combinación de respuestas modales tipo CQC (complete quadratic combination). Los resultados obtenidos se muestran en la Tabla III-8, para desplazamientos, aceleraciones, fuerzas equivalentes, corte basal, y momentos en la base para un sistema coordinado global ubicado bajo la proyección del centroide de la losa como se muestra en la Figura III-2.

Tabla III-8: Fuerzas equivalentes y resumen de respuesta de marco de un piso mediante AME sometida a acción sísmica en las direcciones x, y.

Dirección - Nodo	$u_{\max}$ (cm)		$\ddot{u}_{\max}$ (cm/s <sup>2</sup> )		$f_{s\max}$ (kgf)	
	sismo x	sismo y	sismo x	sismo y	sismo x	sismo y
x <sub>1</sub> ←	0.13532	0.00001	201.037	0.040	384.377	0.076
y <sub>1</sub> ←	0.00002	0.06165	0.028	167.554	0.053	320.359
z <sub>1</sub> ←	0.00031	0.00031	0.513	0.981	0.980	1.875
x <sub>2</sub> ←	0.13532	0.00001	201.037	0.040	384.377	0.076
y <sub>2</sub> ←	0.00002	0.06165	0.028	167.554	0.053	320.359
z <sub>2</sub> ←	0.00031	0.00031	0.513	0.981	0.980	1.875
x <sub>3</sub> ←	0.13532	0.00001	201.037	0.040	384.377	0.076
y <sub>3</sub> ←	0.00002	0.06165	0.028	167.554	0.053	320.359
z <sub>3</sub> ←	0.00031	0.00031	0.513	0.981	0.980	1.875
x <sub>4</sub> ←	0.13532	0.00001	201.037	0.040	384.377	0.076
y <sub>4</sub> ←	0.00002	0.06165	0.028	167.554	0.053	320.359
z <sub>4</sub> ←	0.00031	0.00031	0.513	0.981	0.980	1.875
Reacciones basales			$R_{b\max}$ (kgf)		$M_{b\max}$ (kgf-cm)	
			sismo x	sismo y	sismo x	sismo y
x ←			1537.507	0.000	0.000	385701.517
y ←			0.000	1281.435	462120.734	0.000
z ←			0.000	0.000	0.000	0.000

Estos resultados fueron comparados con los obtenidos directamente de ETABS, comprobando que son completamente coincidentes tanto para la respuesta de desplazamientos nodales como para las reacciones de fuerzas y momentos basales.

### III.3 Inclusión de Torsión Accidental en la Estructura de Un Piso

En la presente sección se desarrolla el proceso a seguir para considerar la torsión accidental conforme la metodología seguida por ETABS. Dicho proceso se implementó en un algoritmo desarrollado en MATLAB. Al final de este capítulo se comparan los resultados obtenidos mediante esta implementación con los resultados obtenidos mediante ETABS.

A partir de las excentricidades  $e_x$  y  $e_y$  de la masa sobre el eje x e y, respectivamente, tal como se muestra en la Figura III-8, se delimitan las nuevas áreas tributarias correspondientes a cada nodo  $i=1$  a 4, y se define la nueva posición del centro de masa. Entonces al  $i$ -ésimo nodo le corresponde la masa  $m'_i$ , calculada en base a la nueva distribución de áreas tributarias, y satisfaciendo la nueva ubicación del centro de masa de la losa, tal como se detalla más adelante.

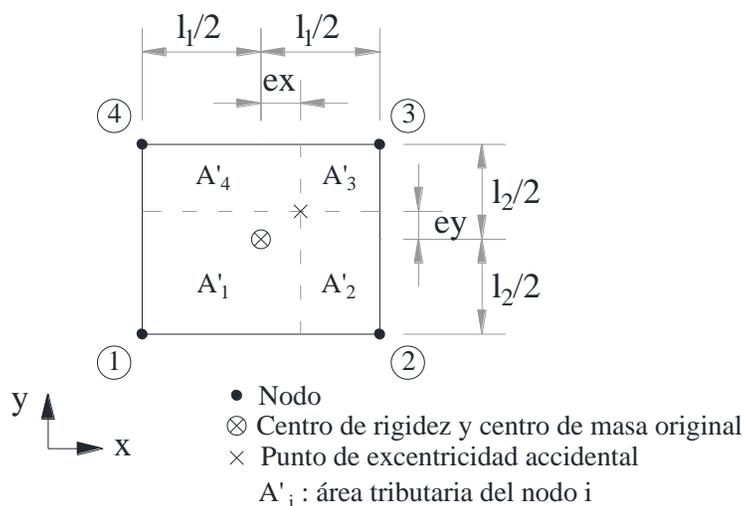


Figura III-8: Áreas tributarias asignadas a los nodos de la losa de piso considerando excentricidad por torsión accidental.

Conforme lo indicado en la sección II.5, el proceso empleado por ETABS para considerar la torsión accidental consiste en determinar la respuesta de la estructura mediante AME y adicionar los resultados obtenidos de aplicar momentos torsores en cada nodo, tal como se esquematiza en la para un sismo en dirección x. Estos pares torsores se obtienen como el producto de excentricidad por las fuerzas equivalentes resultantes al multiplicar la nueva distribución de masas nodales por las correspondientes aceleraciones determinadas del AME de la estructura original.

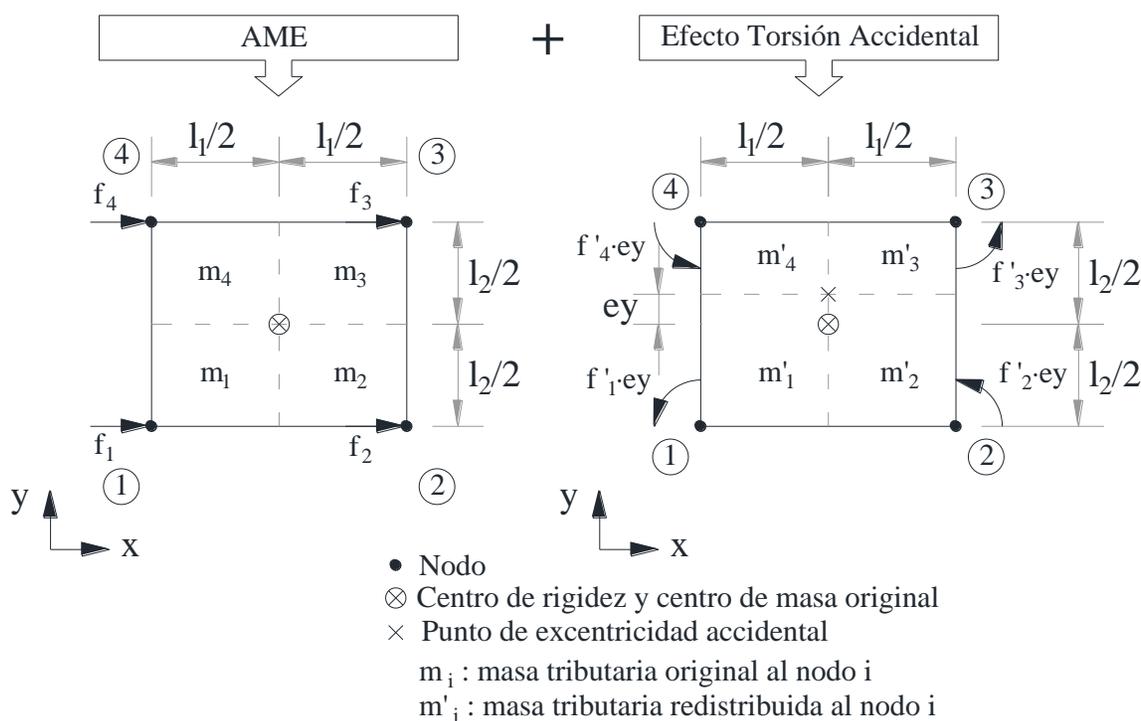


Figura III-9: Esquema del proceso realizado por ETABS para considerar la torsión accidental, para sismo en dirección x con excentricidad  $e_y$ .

Aplicando las condiciones de equilibrio y sistemas de fuerzas equivalentes, se puede demostrar que el proceso indicado en la , es igual que resolver la estructura para un sistema de fuerzas traslacionales equivalentes considerando la redistribución de la masa para incluir el efecto de la torsión accidental. Este proceso se esquematiza gráficamente en la Figura III-10, y es el que se desarrolla a continuación por incluir al caso detallado en la , ya

que considera las fuerzas inerciales en las tres direcciones traslacionales, lo cual es necesario al suponer la losa como diafragma semirrígido. Posteriormente se comparan con los resultados de dicho algoritmo con los obtenidos directamente del modelamiento con ETABS. El detalle del código implementado en MATLAB siguiendo este proceso se encuentra en la Tabla B-1 del Anexo B.

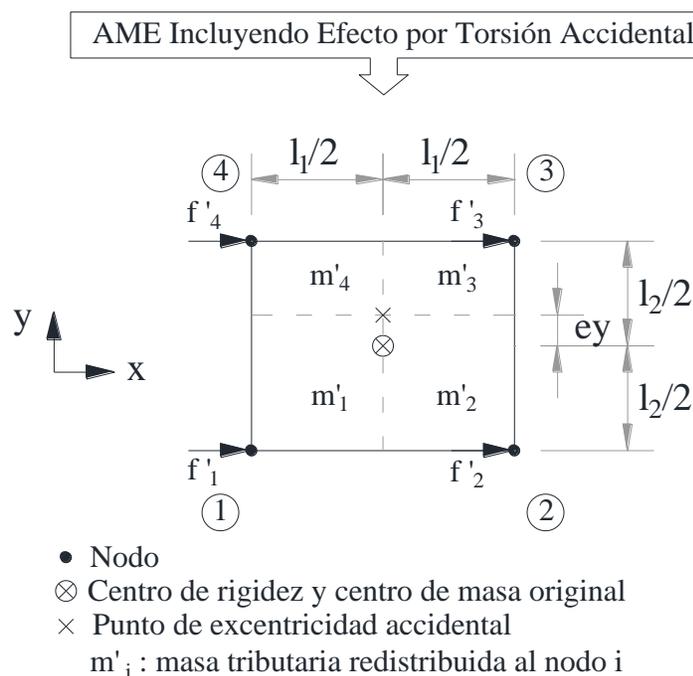


Figura III-10: Esquema del proceso equivalente al realizado por ETABS para considerar la torsión accidental, para sismo en dirección  $x$  con excentricidad  $ey$ .

Considerando la redistribución de masas para la nueva posición del centro de masa de la losa como se muestra, la matriz de masas de la estructura pasa a ser:

$$\mathbf{M}' = \begin{bmatrix} \mathbf{M}'_1 & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \cdots & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{M}'_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \mathbf{M}'_3 & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \cdots & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{M}'_4 \end{bmatrix}, \text{ con: } \mathbf{M}'_i = m'_i \cdot \begin{bmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = m'_i \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} \quad (3.24)$$

Para una excitación sísmica en una dirección  $d$ , en forma análoga a la expresión (3.16), la expansión modal del vector de “fuerzas” es  $M' \varphi_n \Gamma_{nd} = s'_{nd}$ , mientras que el vector modal de fuerzas equivalentes nodales, desplazamientos nodales, el cortante basal, respectivamente se determinan como:

$$f'_{snd} = s'_{nd} S_{and} \quad (3.25)$$

$$u'_{nd} = K^{-1} f'_{snd} \quad (3.26)$$

$$R'_{xbnd} = \sum f'_{xsnd}, \quad R'_{ybnd} = \sum f'_{ysnd}, \quad R'_{zbnd} = \sum f'_{zsd} \quad (3.27)$$

$$M_{xbnd} = \sum f_{snd}(i) \cdot d_{xi}, \quad M_{ybnd} = \sum f_{snd}(i) \cdot d_{yi}, \quad (3.28)$$

$$M_{zbnd} = \sum f_{snd}(i) \cdot d_{zi}$$

Para una acción sísmica en dirección x con una excentricidad  $ey = +5\% \cdot l_2$ , y una acción sísmica en dirección y con una excentricidad  $ex = +5\% \cdot l_1$ , véase , actuando en forma independiente sobre el marco, las masas nodales correspondientes a cada caso se detallan en la Tabla III-9.

Tabla III-9: Masas tributarias a los nodos de la losa del marco de un piso, considerando excentricidad, para sismo en x, y.

Nodo	Masa para sismo x		Masa para sismo y	
	(kg)	(kgf·s2/cm)	(kg)	(kgf·s2/cm)
1	1687.500	1.721	1687.500	1.721
2	1687.500	1.721	2062.500	2.103
3	2062.500	2.103	2062.500	2.103
4	2062.500	2.103	1687.500	1.721
<b>Σ</b>	<b>7500.000</b>	<b>7.648</b>	<b>7500.000</b>	<b>7.648</b>

Los resultados obtenidos de la implementación de este proceso mediante el código de la Tabla B-1 del Anexo B desarrollado en MATLAB frente a la solicitación sísmica en la dirección x, y, actuando en forma independiente se resumen en la . En dicha tabla, se muestran las fuerzas nodales equivalentes aplicadas en el marco para considerar la torsión accidental, los desplazamientos nodales y las reacciones basales obtenidas como respuesta de la estructura. Para la determinación de los resultados se empleó una combinación modal tipo CQC (Tabla B-5 del Anexo B).

Tabla III-10: Fuerzas equivalentes máximas aplicadas, desplazamientos nodales y reacciones basales del marco de un piso sometido a acción la sísmica en las direcciones x, y, mediante AME incluyendo torsión accidental en el algoritmo desarrollado en MATLAB.

Dirección - nodo	$f'_{s \max}$ (kgf)		$u'_{\max}$ (cm)	
	sismo x	sismo y	sismo x	sismo y
x <sub>1</sub> ←	345.939	0.068	0.13040	0.00509
y <sub>1</sub> ←	0.047	288.323	0.00610	0.05527
z <sub>1</sub> ←	0.882	1.687	0.00031	0.00030
x <sub>2</sub> ←	345.939	0.083	0.13040	0.00511
y <sub>2</sub> ←	0.047	352.395	0.00610	0.06804
z <sub>2</sub> ←	0.882	2.062	0.00031	0.00032
x <sub>3</sub> ←	422.814	0.083	0.14023	0.00511
y <sub>3</sub> ←	0.058	352.395	0.00614	0.06804
z <sub>3</sub> ←	1.078	2.062	0.00030	0.00032
x <sub>4</sub> ←	422.814	0.068	0.14023	0.00509
y <sub>4</sub> ←	0.058	288.323	0.00614	0.05527
z <sub>4</sub> ←	1.078	1.687	0.00030	0.00030
Reacciones basales	$R_{b \max}$ (kgf)		$M_{b \max}$ (kgf-cm)	
	sismo x	sismo y	sismo x	sismo y
x ←	1537.507	0.000	0.000	385701.537
y ←	0.000	1281.435	462120.734	0.000
z ←	0.000	0.000	30754.813	32040.996

Por otro lado, resolviendo el modelo de la estructura de un piso directamente en ETABS, mediante un análisis modal se determinó que la estructura posee doce modos cuyos períodos y frecuencias circulares coinciden con los encontrados al resolver el problema de valores y vectores propios que fueron indicados en la Tabla III-5. El espectro ENCh1 mostrado en la Figura III-7 fue ingresado como una función que define el espectro de pseudoaceleración a emplear en los análisis. Se crearon dos casos de carga para sismo en la dirección x, e y, actuando en forma independiente, para realizar un AME incluyendo un 5% para la torsión accidental como se indica en la Figura II-2, y finalmente se resolvió la estructura.

Los resultados de aceleración que entrega ETABS son por piso, tal como se detalla en la Tabla III-11.

Tabla III-11: Aceleraciones de piso mediante AME en las direcciones x, y, incluyendo torsión accidental, para la estructura de un piso con ETABS.

<b>Aceleración de piso</b>		<b>(cm/s<sup>2</sup>)</b>	
	<b>sismo x</b>	<b>sismo y</b>	
x ←	201.037	0.040	
y ←	0.028	167.554	
z ←	0.513	0.981	

Comparando las aceleraciones nodales en las direcciones x, y, z de la Tabla III-8, correspondientes al AME sin considerar torsión accidental obtenidas a partir del algoritmo implementado en MATLAB (Tabla B-1 del Anexo B), con las aceleraciones por piso obtenidas mediante el empleo de ETABS incluyendo la torsión accidental, tal como se indica en la Tabla III-11, se observa que estas coinciden plenamente. Esto corrobora el hecho de que ETABS emplea las aceleraciones nodales del AME en la inclusión de la torsión accidental.

La respuesta del marco de un piso a los dos casos de acción sísmica en dirección x e y, incluyendo la torsión accidental mediante ETABS se resumen en la Tabla III-12. En dicha

tabla se muestran los resultados obtenidos para los desplazamientos nodales, y esfuerzos basales considerando un sistema coordinado global ubicado bajo la proyección del centroide de la losa como se muestra en la Figura III-2. Cabe indicar que las respuestas que entrega ETABS corresponden a la envolvente que resulta al considerar la excentricidad en sentido  $\pm x$  para un sismo en dirección y, y una excentricidad en sentido  $\pm y$  para un sismo en dirección x. Por esta razón, los desplazamientos nodales que entrega ETABS son los mismos para cada caso de acción sísmica, ya que la estructura es simétrica.

Tabla III-12: Resumen de respuesta de marco de un piso mediante AME sometida a acción sísmica en las direcciones x, y, incluyendo torsión accidental, con ETABS.

Dirección - nodo	$u'_{\max}$ (cm)			
	sismo x	sismo y		
x <sub>1</sub> ←	0.14021	0.00512		
y <sub>1</sub> ←	0.00613	0.06802		
z <sub>1</sub> ←	0.00032	0.00032		
x <sub>2</sub> ←	0.14021	0.00512		
y <sub>2</sub> ←	0.00613	0.06802		
z <sub>2</sub> ←	0.00032	0.00032		
x <sub>3</sub> ←	0.14021	0.00512		
y <sub>3</sub> ←	0.00613	0.06802		
z <sub>3</sub> ←	0.00032	0.00032		
x <sub>4</sub> ←	0.14021	0.00512		
y <sub>4</sub> ←	0.00613	0.06802		
z <sub>4</sub> ←	0.00032	0.00032		
Reacciones basales	$R_{b\max}$ (kgf)		$M_{b\max}$ (kgf-cm)	
	sismo x	sismo y	sismo x	sismo y
x ←	1537.507	0.000	0.000	385701.527
y ←	0.000	1281.435	462120.721	0.000
z ←	0.000	0.000	30750.137	32035.876

En la Tabla III-13, se muestra el error absoluto relativo (E.A. Relativo) determinado al comparar los resultados de ETABS con los valores correspondientes de la envolvente de desplazamientos y esfuerzos basales de la obtenidos a través de la aplicación del algoritmo en MATLAB (Tabla B-1 del Anexo B) para cada caso de actuación del sismo. El error relativo absoluto se calcula empleando la expresión (3.29).

$$E.A. Relativo = \frac{\left| (envolvente respuesta)_{algoritmo} - (respuesta)_{ETABS} \right|}{(respuesta)_{ETABS}} \cdot 100 \quad (3.29)$$

Para el caso de los desplazamientos, en la Tabla III-13 se coloca los máximos valores del error absoluto relativo cometido en las tres direcciones principales x, y, z.

Tabla III-13: Error absoluto relativo al comparar resultados obtenidos de la implementación del algoritmo en MATLAB con los obtenidos mediante ETABS para el marco de un piso sometido a acción sísmica en las direcciones x, y, incluyendo torsión accidental.

E.A. Relativo	Desplazamiento (%)		Fuerza Basal (%)		Momento Basal (%)	
	sismo x	sismo y	sismo x	sismo y	sismo x	sismo y
x ←	0.011	0.049	0.000	-	-	0.000
y ←	0.060	0.019	-	0.000	0.000	-
z ←	0.126	0.099	-	-	0.015	0.016

La Tabla III-13 evidencia que la mayor diferencia entre el algoritmo de MATLAB e ETABS ocurre al estimar los desplazamientos nodales, siendo semejante al 1%. Para el resto de las respuestas los valores que predicen ambos son prácticamente coincidentes. Es decir, se verifica que las hipótesis y formulaciones implementadas en MATLAB son equivalentes a las empleadas por ETABS.

En el caso de considerar simultaneidad de la acción sísmica en las direcciones x e y, incluyendo el efecto de la torsión accidental en ambos casos, se ejecuta el mismo proceso antes descrito en cada dirección, para luego aplicar alguna regla de combinación de efectos dependiendo de la normativa a emplear, que pueden ser, por ejemplo:

- a) Raíz cuadrada de la suma de cuadrados.
- b) La suma vectorial de la respuesta a la acción sísmica en una dirección, más un cierto porcentaje de la acción sísmica en la otra dirección.

Para disponer de una noción del efecto que tiene la inclusión de la torsión accidental (T.A.) de la estructura, la Tabla III-14 resume la comparación obtenida como la diferencia relativa de los resultados obtenidos a partir de ETABS del modelo sin inclusión de torsión accidental (Tabla III-8) y las respuestas considerando dicho efecto (Tabla III-12). La diferencia relativa (D. Relativa) se calcula empleando la expresión (3.30).

$$D. Relativa = \frac{(respuesta\ con\ T.A.)_{ETABS} - (respuesta\ sin\ T.A.)_{ETABS}}{(respuesta\ con\ T.A.)_{ETABS}} \cdot 100 \quad (3.30)$$

En la Tabla III-14, para el caso de los desplazamientos, se coloca los máximos valores de las diferencias relativas obtenidas en las tres direcciones principales x, y, z.

Tabla III-14: Diferencia relativa al comparar resultados de un análisis con y sin torsión accidental a través de ETABS para el marco de un piso sometido a acción sísmica en las direcciones x, y.

MARCO DE UN PISO						
D. Relativa	Desplazamiento (%)		Fuerza Basal (%)		Momento Basal (%)	
	sismo x	sismo y	sismo x	sismo y	sismo x	sismo y
x ←	3.493	99.759	0.000	-	-	0.000
y ←	99.732	9.365	-	0.000	0.000	-
z ←	2.924	2.959	-	-	100.000	100.000

A partir de la tabla anterior, se observa que al incluir la torsión accidental en una actuación sísmica en la dirección x, los desplazamientos en las direcciones x e z aumentan aproximadamente un 3%, mientras que una diferencia relativa del 99.7% para los desplazamientos en la dirección y indica que aparece una respuesta nueva que en el caso sin torsión accidental era prácticamente nula. Las fuerzas de reacción en la base en las direcciones x, y, z no varían al igual que los momentos de reacción con respecto a los ejes x

e y. Finalmente, una diferencia relativa del 100% indica que aparece un momento torsor con respecto al eje z.

Para el caso de una excitación sísmica en la dirección y, tal como se resume en la Tabla III-14, la diferencia relativa indica un aumento de cerca el 9.4% del desplazamiento en dicha dirección, un incremento de alrededor el 3% en la dirección vertical z. En cambio en la dirección lateral x, aparece un desplazamiento nuevo que en el caso sin torsión accidental era despreciable. Al igual que en el caso anterior, las reacciones traslacionales en la base en las direcciones x, y, z no varían, así como los momentos de reacción con respecto a los ejes x e y. Una diferencia relativa del 100% indica que aparece un momento torsor con respecto al eje z.

En resumen, al incluir la torsión accidental en el análisis del marco de un piso sometido a una excitación sísmica en una dirección dada, el máximo incremento de desplazamiento ocurre en la misma dirección lateral del sismo. En la dirección lateral perpendicular a la actuación sísmica aparecen nuevos desplazamientos que inicialmente eran despreciables. Mientras que en la dirección vertical la variación de desplazamiento es mínima. Las tres reacciones traslacionales y las reacciones de momentos respecto al eje x e y en la base no cambian, pero se observa que aparece un momento torsor respecto al eje z que era nulo en el caso sin torsión accidental.

El proceso implementado y que lleva a cabo ETABS, supone que las formas modales no sufren una modificación sustancial al incluir la torsión accidental, tal como se ha observado en distintos casos de estudio (Dimova y Alashki, 2003). Por tanto, el emplear propiedades modales con el centro de masa en su posición original y combinarlo con una redistribución de las masas de piso, es una buena aproximación del comportamiento dinámico de la estructura considerando la torsión accidental.

Con la intención de conocer el comportamiento de los resultados que entrega el proceso que lleva a cabo ETABS, se han resuelto varios modelos para el marco de un piso presentado, sin excentricidad intrínseca, haciendo variar sus períodos fundamentales, pero manteniendo las dimensiones de piso, largo, ancho y radio de giro

( $r$ ), y se los ha comparado con curvas de procesos estático y dinámico que incluyen el efecto de la torsión accidental. El proceso estático consiste en la aplicación de momentos estáticos en la estructura tal como se describe en De La Llera y Chopra (1995). Mientras que De la Llera y Chopra (1995, 1996) han propuesto una envolvente a la respuesta dinámica de los edificios considerando la torsión accidental. En la Figura III-11, se muestra la respuesta del desplazamiento máximo de piso, considerando torsión accidental, normalizado respecto al desplazamiento de dicho punto sin torsión accidental, versus la tasa de frecuencia  $\Omega$ , definida como la relación de la frecuencia de los modos principales rotacional respecto al traslacional en análisis, en este caso la dirección  $y$ .

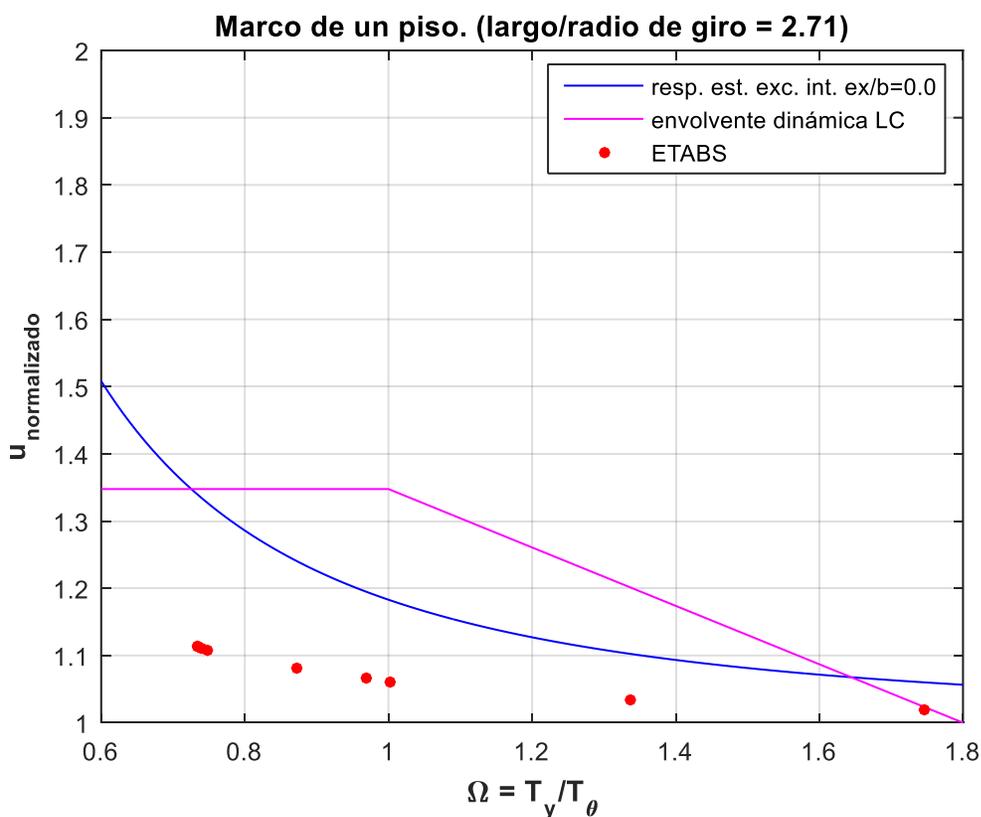


Figura III-11: Comparación de respuestas normalizadas para el marco de un piso, empleando procesos estáticos, dinámicos, y la modelación con ETABS.

En la gráfica anterior se observa que el proceso llevado a cabo por ETABS incluyendo la torsión accidental para el marco de un piso, entrega respuestas aproximadamente 10% superiores a las que se obtienen al no considerar la torsión accidental. Estos resultados con torsión accidental se encuentran por debajo de los resultados que pueden entregar procesos estáticos y dinámicos. Es importante recalcar que las curvas presentadas para los procesos estáticos y dinámicos descritos corresponden a envolventes de diseño, mientras que obviamente los puntos modelados con ETABS corresponden a modelos idealizados bajo las simplificaciones y supuestos indicados al inicio de la presente sección.

## **IV. VALIDACIÓN PARA ESTRUCTURAS DE VARIOS PISOS**

A continuación se analiza una estructura de varios pisos empleando el proceso descrito en la sección III.3 para la inclusión de la torsión accidental según la metodología empleada por ETABS, tal como se indica en la sección II.5 del presente documento.

De la misma manera que en el caso anterior, se emplea el algoritmo de la Tabla B-3 del Anexo B, para resolver la estructura en MATLAB. Finalmente, se contrastan los resultados obtenidos en MATLAB con los resultados obtenidos en ETABS.

Al igual que el ejemplo anterior, en el presente desarrollo se considerará un 5% de excentricidad.

### **IV.1 Modelo para la estructura de varios pisos**

La estructura a analizar es un edificio de hormigón armado de cinco pisos. Cada piso consta de una losa plana rectangular apoyada sobre cuatro columnas tal como se indica en la Figura III-1 para el marco de un piso detallado en la sección III.1. Las dimensiones de los elementos, columnas y losas, se toman los mismos que los del marco de un piso. Se asume que las columnas se encuentran empotradas en la base. Se adopta un amortiguamiento intrínseco ( $\xi$ ) del 5% para todos los modos. En la Figura IV-1 se muestra un esquema de la disposición de elementos, dimensión, y nominación de nodos, barras y losas.

Las losas se asumen como placas delgadas de cuatro nodos, despreciando el efecto de corte normal al plano de la losa. Las columnas se modelan como elementos tipo barra de dos nodos. En todos los nodos de los elementos se consideran seis grados de libertad, tres traslacionales y tres rotacionales, siguiendo la convención indicada en la Figura III-4.

Las propiedades mecánicas asumidas para el hormigón armado son las mismas que se detallan en la Tabla III-1.

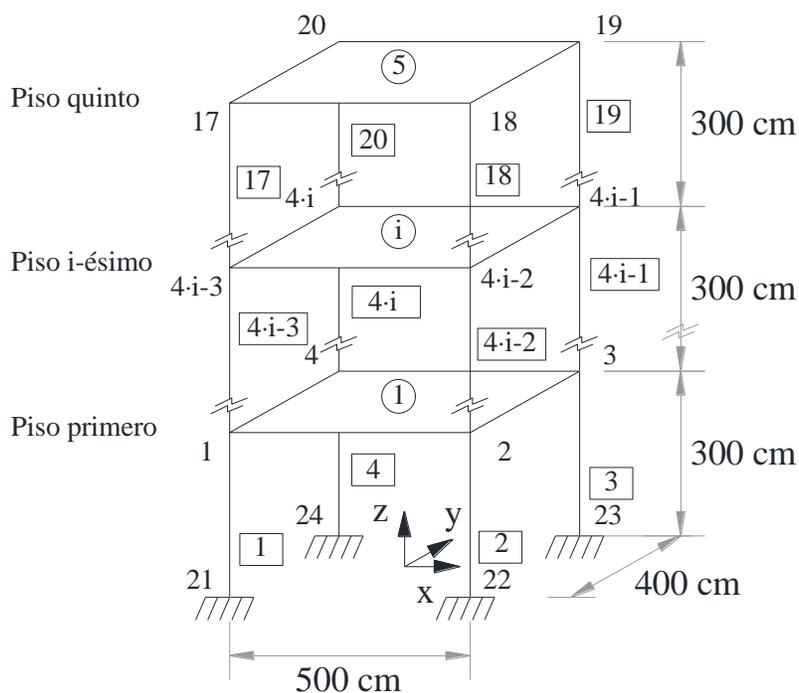


Figura IV-1: Estructura de cinco niveles.

Se asume que las columnas no poseen masa, por tanto la masa sísmica se determina únicamente a partir del aporte de la masa de las losas. Dado que todas las losas son rectangulares, la masa nodal asignada a cada nodo corresponde a áreas tributarias iguales como se muestra en la Tabla III-4.

Para cada una de las losas del primer a quinto piso, las áreas tributarias correspondientes a cada nodo son  $A_1 = \dots = A_{20} = (l_1 \cdot l_2) / 4 = A / 4$ , en donde  $A$  es el área de la losa (véase Figura III-3). De forma análoga al caso de un piso analizando anteriormente, las masas nodales para  $i$  de 1 a 20, son  $m_1 = \dots = m_4 = (A / 4 \cdot t) \cdot \rho = 1875 \text{ kg} = 1.912 \text{ kgf} \cdot \text{s}^2 / \text{cm}$ , dando un total para la estructura de  $\sum m_i = 37500 \text{ kg} = 38.239 \text{ kgf} \cdot \text{s}^2 / \text{cm}$ .

Dado que las masas nodales son puntuales, se considera que tienen efecto en las 3 direcciones traslacionales principales  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , por tanto su expresión matricial es como se

indica en (3.1). De esta forma la matriz de masa del sistema sería de 60x60, cuya diagonal está compuesta por las matrices de masas nodales (3.1):

$$M = \begin{bmatrix} M_1 & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \cdots & \cdots & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & M_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & M_{19} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \cdots & \cdots & \mathbf{0}_{3 \times 3} & M_{20} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

El edificio tiene en total 24 nodos, con 4 de ellos empotrados en la base. Dado que la masa nodal actúa únicamente en las tres direcciones traslacionales, entonces el número de GDL con masa de los nodos 1 a 20 son  $n_m = 20 \cdot 3 = 60$ , por tanto, la estructura tendría en total sesenta formas modales.

Dado que los elementos tipo barra y placa delgada, poseen las mismas propiedades que las empleadas en el ejemplo anterior, sus matrices de rigidez son las mismas de la Tabla A-1 y Tabla A-2 respectivamente.

Entonces para determinar la matriz de rigidez de la estructura mediante el empleo del código de la Tabla B-1 del Anexo B en MATLAB es necesario ensamblarla a partir de los aportes de rigidez de cada uno de los elementos al sistema. El aporte de las columnas en la rigidez del sistema, conforme la Figura IV-1, se realiza según la correspondencia de nodos locales con globales de la Tabla IV-1. Mientras que el aporte de rigidez al sistema estructural proveniente de las losas, se realizará conforme la Tabla IV-2.

Tabla IV-1: Colocación de barras en la estructura de cinco pisos.

<b>Barra</b>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
<b>nodo i</b>	21	22	23	24	1	2	3	4	5	6
<b>nodo j</b>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

<b>Barra</b>	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
<b>nodo i</b>	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
<b>nodo j</b>	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Tabla IV-2: Colocación de elementos placa en la estructura de cinco pisos.

Losa	Nodo			
	i	j	k	l
1	1	2	3	4
2	5	6	7	8
3	9	10	11	12
4	13	14	15	16
5	17	18	19	20

La matriz de rigidez de la estructura se obtiene ensamblando los aportes correspondientes de los veinte elementos barra y de las cinco placas obteniendo una matriz de 144x144:

$$\left(\mathbf{K}_f^{(1)} + \dots + \mathbf{K}_f^{(20)}\right) + \left(\mathbf{K}_{sl}^{(1)} + \dots + \mathbf{K}_{sl}^{(5)}\right) \Rightarrow \mathbf{K}_T \quad (3.31)$$

Los nodos 21 a 24 de los apoyos se encuentran empotrados, así los GDL de dichos nodos se anulan, obteniendo la matriz de rigidez reducida  $\mathbf{K}_R$  de la estructura de 120x120. Sabiendo que la masa de la estructura se asigna a los nodos de la losa, únicamente los GDL traslacionales dispondrán de masa asociada, por lo que aplicando condensación estática, sobre los GDL rotacionales de la matriz de rigidez reducida para dejarla en términos de los GDL traslacionales (véase Tabla B-2 del Anexo B), se obtiene la matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  del sistema que es de 60x60.

La presente estructura posee entonces sesenta formas modales. A continuación se resumen en la Tabla IV-3 únicamente las primeras 18 frecuencias circulares y períodos propios de vibración de la estructura, obtenidas a partir del empleo del código mostrado en la Tabla B-3, dentro del algoritmo principal (Tabla B-1) en MATLAB.

Tabla IV-3: Frecuencias circulares y períodos de la estructura de cinco pisos.

<b>Modo</b>	1	2	3	4	5	6
$\omega_n$ (rad/s)	7.04694	7.92342	10.18808	23.66226	25.18554	32.93470
$T_n$ (s)	0.89162	0.79299	0.61672	0.26554	0.24948	0.19078
<b>Modo</b>	7	8	9	10	11	12
$\omega_n$ (rad/s)	45.84741	47.66310	61.59954	68.56203	79.40378	87.70612
$T_n$ (s)	0.13705	0.13182	0.10200	0.09164	0.07913	0.07164
<b>Modo</b>	13	14	15	16	17	18
$\omega_n$ (rad/s)	94.05994	109.83433	122.17633	162.67941	165.28693	169.52693
$T_n$ (s)	0.06680	0.05721	0.05143	0.03862	0.03801	0.03706

Para una excitación sísmica lateral en las direcciones principales x e y, la masa de aporte en la dirección de la excitación (3.11), el factor de participación modal (3.12) y porcentaje de la masa modal efectiva (3.15), para los primeros 18 modos de la estructura de cinco pisos se muestran en la Tabla IV-4 a partir del empleo del algoritmo detallado en la Tabla B-1 del Anexo B.

En este caso también se verificó que las propiedades modales descritas en la Tabla IV-3 y Tabla IV-4 obtenidas empleando el algoritmo desarrollado en MATLAB también son coincidentes con las que se encuentran a partir de realizar el análisis de la estructura en ETABS.

Tabla IV-4: Resumen de propiedades modales para la estructura de cinco pisos.

Modo	$L_n$ (kgf·s <sup>2</sup> /cm)		$\Gamma_n$ ( )		$pM_n^*$ (%)	
	x	y	x	y	x	y
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	-5.6222	0.0000	-5.6222	0.0000	82.6606	0.0000
3	0.0000	5.5887	0.0000	5.5887	0.0000	81.6788
4	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5	-2.0168	0.0000	-2.0168	0.0000	10.6373	0.0000
6	0.0000	2.0696	0.0000	2.0696	0.0000	11.2014
7	-1.2619	0.0000	-1.2619	0.0000	4.1645	0.0000
8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
9	0.0000	-1.2928	0.0000	-1.2928	0.0000	4.3707
10	-0.8630	0.0000	-0.8630	0.0000	1.9479	0.0000
11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
12	0.4748	0.0000	0.4748	0.0000	0.5896	0.0000
13	0.0000	-0.8953	0.0000	-0.8953	0.0000	2.0961
14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
15	0.0000	0.4996	0.0000	0.4996	0.0000	0.6526
16	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
17	0.0059	0.0000	0.0059	0.0000	0.0001	0.0000
18	0.0000	0.0108	0.0000	0.0108	0.0000	0.0003
$\Sigma$					100.0000	99.9999

## IV.2 Análisis Modal Espectral del Edificio de Cinco Pisos

En la Figura III-7 se muestra el espectro de pseudoaceleración (ENCh5) para la estructura de cinco pisos con amortiguamiento intrínseco  $\xi=5\%$  en todos los modos, cuyo período fundamental es de 0.892s (Tabla IV-3). El espectro de pseudoaceleración se ha elaborado empleando la norma Chilena NCh 433 (2009), asumiendo un suelo tipo C en la zona

sísmica 3, mediante el empleo de la rutina mostrada en la Tabla B-4 del Anexo B para MATLAB.

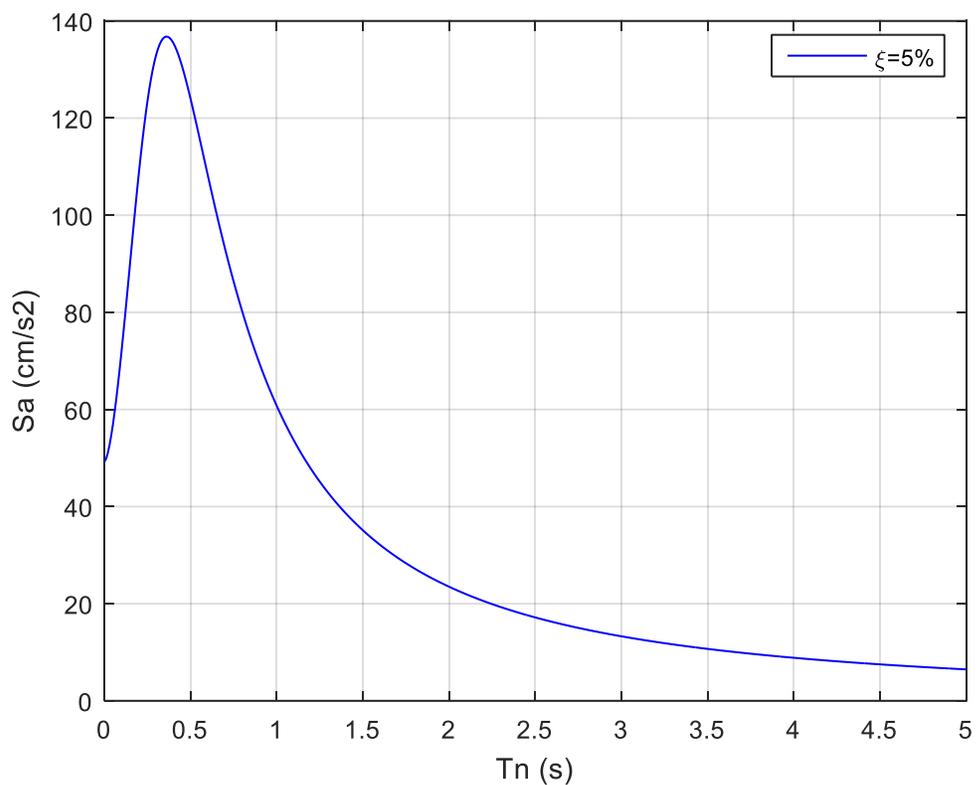


Figura IV-2: Espectro de pseudoaceleración (ENCh5) para suelo tipo C, zona sísmica III según NCh 433(2009) con  $\xi = 5\%$ .

Los valores de pseudoaceleración y desplazamiento máximo de respuesta de la estructura correspondientes a los modos naturales de vibración del edificio de cinco pisos se detallan en la Tabla IV-5 para los primeros 18 modos. Estos fueron obtenidos a partir del uso del código detallado en la Tabla B-1 del Anexo B desarrollado en MATLAB.

Tabla IV-5: Pseudoaceleración y desplazamientos máximos modales del edificio de cinco pisos para el espectro ENCh5.

<b>Modo</b>	1	2	3	4	5	6
<b>Dirección</b>	x, y					
<b>San (cm/s<sup>2</sup>)</b>	70.2620	80.9604	105.5396	127.1006	123.4354	105.5874
<b>Sdn (cm)</b>	1.414879	1.289579	1.016789	0.227005	0.194597	0.097343
<b>Modo</b>	7	8	9	10	11	12
<b>Dirección</b>	x, y					
<b>San (cm/s<sup>2</sup>)</b>	85.7417	83.7844	72.9485	69.4040	65.3394	63.0496
<b>Sdn (cm)</b>	0.040791	0.036881	0.019225	0.014764	0.010363	0.008196
<b>Modo</b>	13	14	15	16	17	18
<b>Dirección</b>	x, y					
<b>San (cm/s<sup>2</sup>)</b>	61.6378	58.9751	57.4697	54.4876	54.3644	54.1722
<b>Sdn (cm)</b>	0.006967	0.004889	0.003850	0.002059	0.001990	0.001885

A la estructura de cinco pisos se la somete a dos acciones sísmicas actuando independientemente en cada una de las dos direcciones principales x e y definidas a través del espectro de pseudoaceleración ENCh5. Su respuesta se determina mediante un análisis modal espectral empleando el algoritmo de la Tabla B-1 del Anexo B implementado en MATLAB. En el análisis modal espectral (AME) se emplearon todos los modos utilizando una combinación CQC para determinar las respuestas máximas. Los resultados mostrados en la Tabla III-8, corresponden a desplazamientos, aceleraciones, fuerzas equivalentes, y reacciones de fuerzas y momentos en la base, para un sistema coordinado global ubicado bajo la proyección del centroide de la losa como se muestra en la Figura IV-1.

Al resolver con ETABS la estructura de cinco pisos indicada, se comprobó que los resultados obtenidos del análisis modal espectral coinciden completamente con los correspondientes indicados en la Tabla IV-6 que se obtuvieron mediante el empleo del algoritmo desarrollado en MATLAB.

Tabla IV-6: Fuerzas equivalentes y resumen de respuesta de edificio de cinco pisos mediante AME sometido a acción sísmica en las direcciones x, y, empleando el algoritmo desarrollado en MATLAB.

Nodo	Dir.	$u_{\max}$ (cm)		$\ddot{u}_{\max}$ (cm/s <sup>2</sup> )		$f_{s\max}$ (kgf)		
		sismo x	sismo y	sismo x	sismo y	sismo x	sismo y	
1 a 4	x $\leftarrow$	0.30511	0.00002	45.548	0.004	87.085	0.009	
	y $\leftarrow$	0.00002	0.22290	0.003	42.500	0.005	81.259	
	z $\leftarrow$	0.00366	0.00586	0.294	0.693	0.562	1.324	
5 a 8	x $\leftarrow$	0.75822	0.00001	74.774	0.008	142.965	0.015	
	y $\leftarrow$	0.00001	0.57439	0.005	78.295	0.010	149.697	
	z $\leftarrow$	0.00634	0.01019	0.590	1.316	1.128	2.516	
9 a 12	x $\leftarrow$	1.16414	0.00001	84.804	0.006	162.142	0.012	
	y $\leftarrow$	0.00001	0.90062	0.004	101.223	0.008	193.535	
	z $\leftarrow$	0.00802	0.01289	0.863	1.841	1.649	3.519	
13 a 16	x $\leftarrow$	1.46826	0.00001	94.725	0.008	181.111	0.016	
	y $\leftarrow$	0.00001	1.15168	0.005	121.079	0.010	231.498	
	z $\leftarrow$	0.00885	0.01425	1.063	2.216	2.033	4.237	
17 a 20	x $\leftarrow$	1.64758	0.00003	116.092	0.010	221.964	0.018	
	y $\leftarrow$	0.00002	1.30759	0.007	143.331	0.013	274.044	
	z $\leftarrow$	0.00912	0.01469	1.150	2.384	2.199	4.559	
<b>Reacciones basales</b>				$R_{b\max}$ (kgf)		$M_{b\max}$ (kgf-cm)		
				sismo x	sismo y	sismo x	sismo y	
				x $\leftarrow$	2616.026	0.000	0.000	3631256.490
				y $\leftarrow$	0.000	3333.138	2798942.854	0.000
				z $\leftarrow$	0.000	0.000	0.000	0.000

### IV.3 Respuesta de la Estructura de Cinco Pisos Incluyendo la Torsión Accidental

Para considerar el efecto de la torsión accidental en el edificio de cinco plantas se supondrá que el centro de masa de cada losa se desplaza una excentricidad igual al  $\pm 5\%$  de la

dimensión normal a la dirección de la acción sísmica tal como se muestra en la . El signo del desplazamiento del centro de masa, se tomará igual en todos los pisos para cada dirección de análisis. Siendo la estructura simétrica con respecto a las direcciones principales x e y, es suficiente tomar un caso de excentricidad en cada dirección de análisis, en este caso se toma el signo positivo para la excentricidad.

Empleando el algoritmo detallado en el Anexo B implementado en MATLAB, y considerando excentricidades positivas en cada una de las direcciones principales, para acciones sísmicas x e y actuando en forma independiente, la distribución de masas que corresponden a cada nodo, para el piso i del 1 al 5, es como se muestra en la Tabla IV-7.

Tabla IV-7: Masas tributarias a los nodos de la losa del i-ésimo nivel del edificio de cinco pisos, considerando excentricidad, para sismo en x, y.

Nodo	Masa para sismo x		Masa para sismo y	
	(kg)	(kgf·s <sup>2</sup> /cm)	(kg)	(kgf·s <sup>2</sup> /cm)
4i-3	1687.500	1.721	1687.500	1.721
4i-2	1687.500	1.721	2062.500	2.103
4i-1	2062.500	2.103	2062.500	2.103
4i	2062.500	2.103	1687.500	1.721
<b>Σ piso</b>	<b>7500.000</b>	<b>7.648</b>	<b>7500.000</b>	<b>7.648</b>

Las nuevas fuerzas estáticas equivalentes modales a aplicar en los nodos de la estructura son obtenidas como el producto de las masas nodales por las aceleraciones modales obtenidas del análisis modal espectral.

Al resolver la estructura de cinco pisos incluyendo la torsión accidental mediante el algoritmo implementado en MATLAB (Anexo B), en la Tabla IV-8, se resumen las fuerzas equivalentes máximas aplicadas y los desplazamientos máximos obtenidos empleando una combinación modal CQC (Tabla B-5 del Anexo B).

Tabla IV-8: Fuerzas equivalentes máximas aplicadas, desplazamientos nodales y reacciones basales del edificio de cinco pisos sometido a la acción sísmica en las direcciones x, y, mediante AME incluyendo torsión accidental en el algoritmo desarrollado en MATLAB.

Nodo	Dir.	$f'_{s \max}$ (kgf)		$u'_{\max}$ (cm)	
		sismo x	sismo y	sismo x	sismo y
1 a 2	x $\leftarrow$	78.377	0.008	0.29283	0.01976
	y $\leftarrow$	0.005	73.133	0.01538	0.19824
	z $\leftarrow$	0.506	1.192	0.00377	0.00567
3 a 4	x $\leftarrow$	95.794	0.009	0.31740	0.01971
	y $\leftarrow$	0.006	89.385	0.01534	0.24756
	z $\leftarrow$	0.618	1.457	0.00355	0.00605
5 a 6	x $\leftarrow$	128.668	0.014	0.72390	0.05536
	y $\leftarrow$	0.009	134.728	0.04290	0.50518
	z $\leftarrow$	1.015	2.264	0.00654	0.00986
7 a 8	x $\leftarrow$	157.261	0.017	0.79253	0.05537
	y $\leftarrow$	0.011	164.667	0.04292	0.64359
	z $\leftarrow$	1.240	2.767	0.00615	0.01052
9 a 10	x $\leftarrow$	145.927	0.011	1.10844	0.09012
	y $\leftarrow$	0.007	174.181	0.06962	0.78795
	z $\leftarrow$	1.484	3.167	0.00827	0.01247
11 a 12	x $\leftarrow$	178.356	0.013	1.21983	0.09015
	y $\leftarrow$	0.009	212.888	0.06964	1.01329
	z $\leftarrow$	1.814	3.871	0.00776	0.01331
13 a 14	x $\leftarrow$	163.000	0.014	1.39572	0.11754
	y $\leftarrow$	0.009	208.348	0.09067	1.00474
	z $\leftarrow$	1.829	3.814	0.00913	0.01378
15 a 16	x $\leftarrow$	199.222	0.017	1.54080	0.11756
	y $\leftarrow$	0.012	254.648	0.09069	1.29862
	z $\leftarrow$	2.236	4.661	0.00857	0.01471

(Tabla IV-8, continuación)

Nodo	Dir.	$f'_{s \max}$ (kgf)		$u'_{\max}$ (cm)	
		sismo x	sismo y	sismo x	sismo y
17 a 18	x $\leftarrow$	199.768	0.017	1.56365	0.13600
	y $\leftarrow$	0.011	246.640	0.10491	1.13755
	z $\leftarrow$	1.979	4.103	0.00941	0.01421
19 a 20	x $\leftarrow$	244.161	0.020	1.73152	0.13605
	y $\leftarrow$	0.014	301.448	0.10495	1.47763
	z $\leftarrow$	2.419	5.015	0.00882	0.01518
Reacciones basales		$R_{b \max}$ (kgf)		$M_{b \max}$ (kgf-cm)	
		sismo x	sismo y	sismo x	sismo y
	x $\leftarrow$	2616.026	0.000	0.000	3631256.490
	y $\leftarrow$	0.000	3333.138	2798942.854	0.000
	z $\leftarrow$	0.000	0.000	52320.899	83328.988

Por otro lado, resolviendo la estructura del edificio de cinco niveles directamente con ETABS, se verificó que los períodos, frecuencias circulares y frecuencias circulares coinciden plenamente con los determinados anteriormente en la Tabla IV-3.

Empleando ETABS, tal como se indicó en la Figura II-2 se definió una excentricidad del 5% en cada dirección para considerar la torsión accidental. Luego de resolver la estructura para cada caso de carga sísmica actuando en forma independiente en las direcciones x, y, se encontró que las aceleraciones de piso que entrega ETABS son las que se detallan en la Tabla IV-9.

Al comparar los resultados de la Tabla IV-9 que entrega ETABS, con las aceleraciones nodales de la Tabla IV-6 obtenidas mediante el uso del algoritmo implementado en MATLAB, se observa que coinciden completamente en los niveles respectivos. Esto nuevamente ratifica, hasta aquí, que el proceso deducido es el correcto.

Tabla IV-9: Aceleraciones de piso mediante AME en las direcciones x, y, incluyendo torsión accidental, para la estructura de cinco pisos con ETABS.

Piso	Dirección	Aceleración (cm/s <sup>2</sup> )	
		sismo x	sismo y
1	x ←	45.548	0.004
	y ←	0.003	42.500
	z ←	0.294	0.693
2	x ←	74.774	0.008
	y ←	0.005	78.295
	z ←	0.590	1.316
3	x ←	84.804	0.006
	y ←	0.004	101.223
	z ←	0.863	1.841
4	x ←	94.725	0.008
	y ←	0.005	121.079
	z ←	1.063	2.216
5	x ←	116.092	0.010
	y ←	0.007	143.331
	z ←	1.150	2.384

En la Tabla IV-10 se resumen los resultados obtenidos para los desplazamientos nodales, y esfuerzos basales, empleando ETABS para resolver la estructura de cinco pisos conforme el modelo que se muestra en la Figura IV-1, sometida a dos casos de carga sísmica independientes en las direcciones principales x e y, considerando la torsión accidental. Como se indicó anteriormente, ETABS entrega los resultados envolventes obtenidos al considerar los dos signos de excentricidad en cada una de las direcciones de análisis, es por esto que los desplazamientos nodales por piso son los mismos en cada caso de carga debido a que la estructura empleada para desarrollar el ejemplo es simétrica.

Tabla IV-10: Resumen de respuesta del edificio de cinco pisos mediante AME sometida a acción sísmica en las direcciones x, y, incluyendo torsión accidental, con ETABS.

Nodo	Dir.	$u'_{\max}$ (cm)		
		sismo x	sismo y	
1 a 4	x $\leftarrow$	0.31977	0.02174	
	y $\leftarrow$	0.01833	0.25004	
	z $\leftarrow$	0.00379	0.00606	
5 a 8	x $\leftarrow$	0.79854	0.06033	
	y $\leftarrow$	0.05042	0.64979	
	z $\leftarrow$	0.00657	0.01053	
9 a 12	x $\leftarrow$	1.22864	0.09735	
	y $\leftarrow$	0.08064	1.02229	
	z $\leftarrow$	0.00830	0.01333	
13 a 16	x $\leftarrow$	1.55137	0.12616	
	y $\leftarrow$	0.10390	1.30936	
	z $\leftarrow$	0.00917	0.01473	
17 a 20	x $\leftarrow$	1.74318	0.14550	
	y $\leftarrow$	0.11951	1.48943	
	z $\leftarrow$	0.00945	0.01520	
Reacciones basales	$R_{b\max}$ (kgf)		$M_{b\max}$ (kgf-cm)	
	sismo x	sismo y	sismo x	sismo y
x $\leftarrow$	2616.026	0.000	0	3631256.424
y $\leftarrow$	0.000	3333.138	2798942.798	0
z $\leftarrow$	0.000	0.000	63621.363	93003.403

Al comparar los resultados de la Tabla IV-10 obtenidos mediante ETABS con los valores envolventes de desplazamientos y esfuerzos basales detallados en la Tabla IV-8 a partir del empleo del algoritmo desarrollado en MATLAB, se han determinado los correspondientes errores absolutos relativos que se muestran en la Tabla IV-11, empleando la expresión (3.29). En la Tabla IV-11, para el caso de los desplazamientos se coloca los máximos valores del error absoluto relativo (E.A. Relativo) cometido en las tres direcciones principales x, y, z de entre todos los nodos de piso del edificio.

Tabla IV-11: Error absoluto relativo al comparar resultados obtenidos de la implementación del algoritmo en MATLAB con los obtenidos mediante ETABS para el edificio de cinco niveles sometido a acción sísmica en las direcciones x, y, incluyendo torsión accidental.

<b>E.A. Relativo</b>	<b>Desplazamiento (%)</b>		<b>Fuerza Basal (%)</b>		<b>Momento Basal (%)</b>	
	<b>sismo x</b>	<b>sismo y</b>	<b>sismo x</b>	<b>sismo y</b>	<b>sismo x</b>	<b>sismo y</b>
x $\leftarrow$	0.752	9.124	0.000	-	-	0.000
y $\leftarrow$	16.123	0.991	-	0.000	0.000	-
z $\leftarrow$	0.417	0.180	-	-	17.762	10.402

A partir de los resultados mostrados en la Tabla IV-11, al observar la comparación de los desplazamientos en la dirección de la acción sísmica, se nota que el error absoluto relativo es inferior al 1%. Mientras que, al comparar los desplazamientos en la dirección lateral perpendicular a la acción sísmica, se observa que el mayor error absoluto relativo es de alrededor un 16%. Estas diferencias expresadas en unidades de longitud equivalen a un valor inferior a 0.003 cm, lo cual es prácticamente despreciable para el análisis, tal como se observa en los resultados de desplazamientos de la Tabla IV-8 y Tabla IV-10, obtenidos mediante el algoritmo en MATLAB y el ETABS, respectivamente.

En cuanto a los esfuerzos basales se tiene plena coincidencia en las fuerzas y momentos respecto a los ejes x e y. Mientras que en la estimación del momento torsional se tiene un error absoluto relativo de aproximadamente un 18%, que probablemente se debe a la formulación propia que emplea ETABSv9, y no a la concepción de la metodología para la inclusión de la torsión accidental.

Con la finalidad de obtener una comparación del efecto que tiene la inclusión de la torsión accidental en la respuesta del edificio, en la Tabla IV-12 se resumen las diferencias relativas de los resultados obtenidos al comparar las respuestas de los modelos con y sin el efecto de la torsión accidental empleando ETABS. La diferencia relativa (D. Relativa) se calcula empleando la expresión (3.30).

Para el caso de los desplazamientos, en la Tabla IV-12, se coloca los máximos valores de las diferencias relativas obtenidas en las tres direcciones principales x, y, z de entre todos los nodos de piso del edificio en las respectivas direcciones.

Tabla IV-12: Diferencia relativa al comparar resultados de un análisis con y sin torsión accidental a través de ETABS para el edificio de cinco pisos sometido a acción sísmica en las direcciones x, y.

EDIFICIO DE CINCO PISOS						
D. Relativa	Desplazamiento (%)		Fuerza Basal (%)		Momento Basal (%)	
	sismo x	sismo y	sismo x	sismo y	sismo x	sismo y
x $\leftarrow$	5.484	99.993	0.000	-	-	0.000
y $\leftarrow$	99.992	12.209	-	0.000	0.000	-
z $\leftarrow$	3.493	3.336	-	-	100.000	100.000

Tal como se observa en la Tabla IV-12, al incluir la torsión accidental en el análisis, considerando una excitación sísmica en una dirección dada, el máximo incremento de desplazamiento ocurre en la misma dirección lateral del sismo. En el presente ejemplo, la diferencia relativa máxima en el desplazamiento que tiene la misma dirección de actuación sísmica ha incrementado un 12%, pertenece al caso de sismo en la dirección y. En la dirección lateral normal a la actuación sísmica aparecen nuevos desplazamientos que inicialmente eran despreciables, tal como lo indican las variaciones del 99.99%. En cambio, en la dirección vertical la variación de desplazamiento es mínima

Las tres reacciones traslacionales y las reacciones de momentos respecto al eje x e y en la base no cambian, pero se observa que aparece un momento torsor respecto al eje z que era nulo en el caso sin torsión accidental.

El comportamiento descrito a través de las comparaciones resumidas en la Tabla IV-12 es similar al caso anterior para el marco de un piso de la sección III.3, incluyendo el orden de magnitud de los porcentajes de diferencia en las respuestas.

## V. CONCLUSIONES

En el presente trabajo se revisó cómo incluyen la torsión accidental varias normativas de diseño y cómo considera el programa ETABS esta torsión. Para cumplir los objetivos del trabajo, se desarrolló un algoritmo en MATLAB mediante el cual se pudo verificar el proceso llevado a cabo por ETABS a través del desarrollo de dos ejemplos tipo para resolver las estructuras sin y con la inclusión de la torsión accidental.

El proceso que realiza ETABS para estimar el comportamiento dinámico de la estructura incluyendo la torsión accidental, consiste en primer lugar en realizar un análisis modal espectral a la estructura con el centro de masa en su posición original. Luego, ETABS redistribuye la masa de piso hacia los nodos conforme al valor de excentricidad especificado. En tercer lugar, ETABS aplica en los nodos una fuerza equivalente al producto de las aceleraciones nodales determinadas en el análisis modal espectral y la masa redistribuida. Finalmente, el programa encuentra la respuesta modal de la estructura para este estado de carga, y determina el máximo valor mediante alguna regla de combinación modal previamente definida. Este proceso, al igual que lo indicado en las normas, considera la inclusión de la torsión accidental a través del desplazamiento del centro de masa, por ser una de las fuentes que mayor incidencia tiene en la respuesta de la estructura a este efecto.

Para el marco de un piso sometido a la acción sísmica en las dos direcciones principales  $x$  e  $y$  actuando en forma independiente, con inclusión de torsión accidental, se concluyó que los resultados obtenidos para los desplazamientos nodales y reacciones basales a partir del algoritmo desarrollado en MATLAB coinciden a los valores calculados mediante ETABS. Para el caso de la edificación de cinco niveles, en cuanto a los desplazamientos obtenidos mediante MATLAB e ETABS, se verificó que la diferencia relativa en la dirección de acción sísmica es menor al 1%, mientras que en la dirección lateral normal es de hasta un 16%, y en la dirección vertical la diferencia es máximo un 4%. Además en el caso del edificio de cinco pisos, los resultados de las reacciones basales son coincidentes tanto en

ETABS como a partir de MATLAB, excepto por la diferencia en la estimación del momento torsor de reacción en la base es de hasta un 18% aproximadamente.

A partir de los resultados y comparaciones obtenidas, se puede indicar que el proceso implementado corresponde al que realiza ETABS para analizar las estructuras incluyendo torsión accidental, y que las diferencias seguramente obedecen a formulación y procesos propios de ETABS v9, mas no a la metodología en sí deducida para la inclusión de la torsión accidental. Ya que comparando los resultados de ETABS con los obtenidos en MATLAB, se observó que todas las propiedades modales son coincidentes, que las aceleraciones empleadas en los análisis de casos con inclusión de torsión accidental también coinciden. Además, la diferencia en los desplazamientos que ocurren en la dirección de la excitación sísmica, que son los que mayor incidencia tienen en la respuesta de los elementos, son menores al 1%. Y finalmente, debido a que todas las reacciones coinciden, excepto en el caso del edificio de cinco pisos en las reacciones torsionales en la base.

Para los casos analizados, se observó que al incluir la torsión accidental se incrementan los desplazamientos nodales en la dirección lateral de actuación sísmica hasta un 12% aproximadamente. En la dirección lateral normal a la acción sísmica aparecen desplazamientos que en el análisis sin torsión accidental no existían. Mientras que los desplazamientos verticales tienen un incremento despreciable al incluir el efecto de la torsión accidental. Lógicamente los incrementos o apariciones de nuevos desplazamientos nodales se traducen en variaciones en los esfuerzos internos de los elementos de la estructura.

Para los ejemplos desarrollados en el presente trabajo se verificó que el mayor incremento en la respuesta de la estructura debido a la torsión accidental ocurre cuando la excitación sísmica actúa en la dirección normal a la dimensión más grande de la planta de piso. Esto es concordante con lo indicado por De la Llera y Chopra (1996).

En cuanto a las reacciones basales de las edificaciones analizadas, estas mantienen constantes con la inclusión de la torsión accidental. Sin embargo, al incluir la torsión

accidental aparecen momentos torsionales dentro de las reacciones basales que no existen para los casos sin torsión accidental..

Finalmente se concluye que es necesario incluir la torsión accidental en los análisis y diseño de edificaciones sometidas a la acción sísmica, debido a que se generan incrementos en la respuesta de la estructura y aparecen nuevas sollicitaciones en la estructura.

**BIBLIOGRAFIA**

- ASCE y SEI. (2010) *Minimum Design Loads for Buildings and Other Structures (ASCE/SEI 7-10)*. American Society of Civil Engineers (ASCE). Reston, Virginia.
- CEN. (2004) *Eurocode 8: Design of structures for earthquake resistance - Part 1: General rules, seismic actions and rules for buildings (EN 1998-1:2004)*. European Committee For Standardization (CEN). Bruselas, Bélgica.
- CHOPRA, A. (2014) *Dinámica de Estructuras*. Pearson Educación de México, S.A. de C.V. Naucalpan de Juárez, Estado de México.
- CSI. (2005) *CSI Analysis Reference Manual*. Computers and Structures, Inc. Berkeley, California, USA.
- CSI. (2016) *Accidental eccentricity for Response Spectrum Analysis*. Recuperado de <https://wiki.csiamerica.com/display/etabs/Accidental+eccentricity+for+Response+Spectrum+Analysis>.
- De La Llera, J. C., Chopra, A. K. (1994a) *Accidental torsion in buildings due to stiffness uncertainty*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 23, 117-136.
- De La Llera, J. C., Chopra, A. K. (1994b) *Accidental torsion in buildings*. Proc., 6th U.S. Nat. Conf. in Earthquake Engineering, Vol. 11, 401-410.
- De La Llera, J. C., Chopra, A. K. (1995) *Estimation of Accidental Torsion Effects for Seismic Design of Buildings*. Journal of Estructural Engineering, Vol. 121, No. 1, 102-114.
- De La Llera, J. C., Chopra, A. K. (1996) *Accidental and Natural Torsion in Earthquake Response and Design of Buildings*. Eleven World Conference on Earthquake Engineering. Paper No. 2006. Acapulco, Mexico.

- Dimova, S. L., Alashki, I. (2003) *Seismic Design of Symmetric Structures for Accidental Torsion*. Bulletin of Earthquake Engineering 1, 303-320. Kluwer Academic Publishers. Netherlands.
- FAHJAN, Y., TUZUN, C., KUBIN, J. (2006) An Alternative Procedure For Accidental Eccentricity In Dynamic Modal Analyses Of Buildings. Paper Number: 1166. *First European Conference on Earthquake Engineering and Seismology*, 3-8 September 2006, Geneva, Switzerland.
- INN-Chile. (2009) *Diseño Sísmico de Edificios, NCh 433, Of1996, modificación 2009 – DS N°61*. Instituto Nacional de Normalización (INN-Chile). Santiago, Chile.
- MIDUVI-Ecuador. (2014) *Norma Ecuatoriana de la Construcción: Peligro Sísmico - Diseño Sismo Resistente (NEC-SE-DS)*. Ministro de Desarrollo Urbano y Vivienda (MIDUVI-Ecuador). Quito, Ecuador.
- OÑATE, E. (2013) *Structural Analysis with the Finite Element Method. Linear Statics. Volumen 2. Beams, Plates and Shells*. Springer-CIMNE. Barcelona, España.

**ANEXOS**

## ANEXO A : TABLAS COMPLEMENTARIAS

Tabla A-1: Matriz de rigidez de elemento tipo barra.

nodo	i					
desplazamiento	u	v	w	$\theta_x$	$\theta_y$	$\theta_z$
unidad	(kgf/cm)			(kgf · cm)		
$\mathbf{K}_f(:,1:6) =$	4337	0	0	0	650600	0
	0	8501	0	-1275176	0	0
	0	0	624576	0	0	0
	0	-1275176	0	255035268	0	0
	650600	0	0	0	130120035	0
	0	0	0	0	0	29134477
	-4337	0	0	0	-650600	0
	0	-8501	0	1275176	0	0
	0	0	-624576	0	0	0
	0	-1275176	0	127517634	0	0
	650600	0	0	0	65060017	0
	0	0	0	0	0	-29134477

nodo	j					
desplazamiento	u	v	w	$\theta_x$	$\theta_y$	$\theta_z$
unidad	(kgf/cm)			(kgf · cm)		
$\mathbf{K}_f(:,7:12) =$	-4337	0	0	0	650600	0
	0	-8501	0	-1275176	0	0
	0	0	-624576	0	0	0
	0	1275176	0	127517634	0	0
	-650600	0	0	0	65060017	0
	0	0	0	0	0	-29134477
	4337	0	0	0	-650600	0
	0	8501	0	1275176	0	0
	0	0	624576	0	0	0
	0	1275176	0	255035268	0	0
	-650600	0	0	0	130120035	0
	0	0	0	0	0	29134477

Tabla A-2: Matriz de rigidez de elemento tipo placa delgada.

nodo	i					
desplazamiento	u	v	w	$\theta_x$	$\theta_y$	$\theta_z$
unidad	(kgf/cm)			(kgf · cm)		
$K_{sl}(:,1:6) =$	1417212	503230	0	0	0	-34193387
	503230	1708018	0	0	0	21076479
	0	0	3472	433634	-245726	0
	0	0	433634	108676253	-16060530	0
	0	0	-245726	-16060530	71034386	0
	-34193387	21076479	0	0	0	14130019439
	-533883	74949	0	0	0	2072326
	-74949	433386	0	0	0	-21076479
	0	0	-461	168636	205575	0
	0	0	168636	51929047	0	0
	0	0	-205575	0	31753006	0
	2072326	21076479	0	0	0	5469629028
	-836615	-503230	0	0	0	-2072326
	-503230	-998717	0	0	0	-4620369
	0	0	-773	-200757	102787	0
	0	0	200757	28373603	0	0
	0	0	-102787	0	19640690	0
	2072326	4620369	0	0	0	-1255898569
	-46714	-74949	0	0	0	34193387
	74949	-1142687	0	0	0	4620369
	0	0	-2239	-401513	-62636	0
	0	0	401513	51929047	0	0
	0	0	-62636	0	31753006	0
	-34193387	4620369	0	0	0	7353098146

nodo	j					
desplazamiento	u	v	w	$\theta_x$	$\theta_y$	$\theta_z$
unidad	(kgf/cm)			(kgf · cm)		
$K_{sl}(:, 7:12) =$	-533883	-74949	0	0	0	2072326
	74949	433386	0	0	0	21076479
	0	0	-461	168636	-205575	0
	0	0	168636	51929047	0	0
	0	0	205575	0	31753006	0
	2072326	-21076479	0	0	0	5469629028
	1417212	-503230	0	0	0	-34193387
	-503230	1708018	0	0	0	-21076479
	0	0	3472	433634	245726	0
	0	0	433634	108676253	16060530	0
	0	0	245726	16060530	71034386	0
	-34193387	-21076479	0	0	0	14130019439
	-46714	74949	0	0	0	34193387
	-74949	-1142687	0	0	0	-4620369
	0	0	-2239	-401513	62636	0
	0	0	401513	51929047	0	0
	0	0	62636	0	31753006	0
	-34193387	-4620369	0	0	0	7353098146
	-836615	503230	0	0	0	-2072326
	503230	-998717	0	0	0	4620369
	0	0	-773	-200757	-102787	0
	0	0	200757	28373603	0	0
	0	0	102787	0	19640690	0
	2072326	-4620369	0	0	0	-1255898569

nodo	k					
desplazamiento	u	v	w	$\theta_x$	$\theta_y$	$\theta_z$
unidad	(kgf/cm)			(kgf · cm)		
$K_{sl}(:,13:18) =$	-836615	-503230	0	0	0	2072326
	-503230	-998717	0	0	0	4620369
	0	0	-773	200757	-102787	0
	0	0	-200757	28373603	0	0
	0	0	102787	0	19640690	0
	-2072326	-4620369	0	0	0	-1255898569
	-46714	-74949	0	0	0	-34193387
	74949	-1142687	0	0	0	-4620369
	0	0	-2239	401513	62636	0
	0	0	-401513	51929047	0	0
	0	0	62636	0	31753006	0
	34193387	-4620369	0	0	0	7353098146
	1417212	503230	0	0	0	34193387
	503230	1708018	0	0	0	-21076479
	0	0	3472	-433634	245726	0
	0	0	-433634	108676253	-16060530	0
	0	0	245726	-16060530	71034386	0
	34193387	-21076479	0	0	0	14130019439
	-533883	74949	0	0	0	-2072326
	-74949	433386	0	0	0	21076479
	0	0	-461	-168636	-205575	0
	0	0	-168636	51929047	0	0
	0	0	205575	0	31753006	0
	-2072326	-21076479	0	0	0	5469629028

nodo	l					
desplazamiento	u	v	w	$\theta_x$	$\theta_y$	$\theta_z$
unidad	(kgf/cm)			(kgf · cm)		
$K_{sl}(:,19:24) =$	-46714	74949	0	0	0	-34193387
	-74949	-1142687	0	0	0	4620369
	0	0	-2239	401513	-62636	0
	0	0	-401513	51929047	0	0
	0	0	-62636	0	31753006	0
	34193387	4620369	0	0	0	7353098146
	-836615	503230	0	0	0	2072326
	503230	-998717	0	0	0	-4620369
	0	0	-773	200757	102787	0
	0	0	-200757	28373603	0	0
	0	0	-102787	0	19640690	0
	-2072326	4620369	0	0	0	-1255898569
	-533883	-74949	0	0	0	-2072326
	74949	433386	0	0	0	-21076479
	0	0	-461	-168636	205575	0
	0	0	-168636	51929047	0	0
	0	0	-205575	0	31753006	0
	-2072326	21076479	0	0	0	5469629028
	1417212	-503230	0	0	0	34193387
	-503230	1708018	0	0	0	21076479
	0	0	3472	-433634	-245726	0
	0	0	-433634	108676253	16060530	0
	0	0	-245726	16060530	71034386	0
	34193387	21076479	0	0	0	14130019439

Tabla A-3: Matriz de rigidez condensada para el marco de un piso, en kgf/cm.

nodo	1			2		
desplazamiento	u	v	w	u	v	w
$\mathbf{K}(:,1:6) =$	1303195	535508	-632	-497658	-107032	546
	535508	1666166	-1225	107032	479659	-318
	-632	-1225	626721	-546	-318	-602
	-497658	107032	-546	1303195	-535508	632
	-107032	479659	-318	-535508	1666166	-1225
	546	-318	-602	632	-1225	626721
	69724	-107036	-72	-872417	535341	158
	107036	-1147750	-1159	535341	-992864	-384
	-72	1159	-1582	-158	384	39
	-872417	-535341	-158	69724	107036	72
	-535341	-992864	-384	-107036	-1147750	-1159
	158	384	39	72	1159	-1582

nodo	3			4		
desplazamiento	u	v	w	u	v	w
$\mathbf{K}(:,7:12) =$	69724	107036	-72	-872417	-535341	158
	-107036	-1147750	1159	-535341	-992864	384
	-72	-1159	-1582	-158	-384	39
	-872417	535341	-158	69724	-107036	72
	535341	-992864	384	107036	-1147750	1159
	158	-384	39	72	-1159	-1582
	1303195	-535508	-632	-497658	107032	546
	-535508	1666166	1225	-107032	479659	318
	-632	1225	626721	-546	318	-602
	-497658	-107032	-546	1303195	535508	632
	107032	479659	318	535508	1666166	1225
	546	318	-602	632	1225	626721

Tabla A-4: Matriz de formas modales para el marco de un piso  
(adimensional).

$\Phi(:, 1:6)$						
	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\varphi_3$	$\varphi_4$	$\varphi_5$	$\varphi_6$
$u_1 \leftarrow$	-0.3616	0.2260	-0.0001	0.0000	0.0008	-0.0003
$v_1 \leftarrow$	0.0000	-0.2823	0.3616	0.0000	-0.0001	0.0018
$w_1 \leftarrow$	-0.0008	-0.0004	0.0018	0.3616	-0.3616	-0.3616
$u_2 \leftarrow$	-0.3616	0.2260	0.0001	0.0000	0.0008	0.0003
$v_2 \leftarrow$	0.0000	0.2823	0.3616	0.0000	0.0001	0.0018
$w_2 \leftarrow$	0.0008	0.0004	0.0018	0.3616	0.3616	-0.3616
$u_3 \leftarrow$	-0.3616	-0.2260	0.0001	0.0000	0.0008	0.0003
$v_3 \leftarrow$	0.0000	-0.2823	0.3616	0.0000	0.0001	0.0018
$w_3 \leftarrow$	-0.0008	0.0004	-0.0018	0.3616	-0.3616	0.3616
$u_4 \leftarrow$	-0.3616	-0.2260	-0.0001	0.0000	0.0008	-0.0003
$v_4 \leftarrow$	0.0000	0.2823	0.3616	0.0000	-0.0001	0.0018
$w_4 \leftarrow$	0.0008	-0.0004	-0.0018	0.3616	0.3616	0.3616

$\Phi(:, 7:12)$						
	$\varphi_7$	$\varphi_8$	$\varphi_9$	$\varphi_{10}$	$\varphi_{11}$	$\varphi_{12}$
$u_1 \leftarrow$	-0.0005	-0.3616	0.0000	0.3304	-0.2823	0.1470
$v_1 \leftarrow$	0.0001	-0.0001	-0.3616	-0.1470	-0.2260	0.3304
$w_1 \leftarrow$	-0.3616	0.0003	0.0001	0.0000	0.0003	0.0000
$u_2 \leftarrow$	-0.0005	0.3616	0.0000	-0.3304	-0.2823	-0.1470
$v_2 \leftarrow$	-0.0001	-0.0001	0.3616	-0.1470	0.2260	0.3304
$w_2 \leftarrow$	0.3616	0.0003	-0.0001	0.0000	-0.0003	0.0000
$u_3 \leftarrow$	0.0005	0.3616	0.0000	0.3304	0.2823	0.1470
$v_3 \leftarrow$	0.0001	-0.0001	0.3616	0.1470	-0.2260	-0.3304
$w_3 \leftarrow$	0.3616	-0.0003	0.0001	0.0000	-0.0003	0.0000
$u_4 \leftarrow$	0.0005	-0.3616	0.0000	-0.3304	0.2823	-0.1470
$v_4 \leftarrow$	-0.0001	-0.0001	-0.3616	0.1470	0.2260	-0.3304
$w_4 \leftarrow$	-0.3616	-0.0003	-0.0001	0.0000	0.0003	0.0000





## ANEXO B : CÓDIGOS EMPLEADOS PARA EL ALGORITMO EN MATLAB

Tabla B-1: Código principal.

```

clc
clear all;
close all;

np = 1; % no. de pisos

ngdl = 6; % no. gdl a considerar por nodo
nnodl = 4; % no. de nodos por losa
nnodc = 2; % no. de nodos por columna

Lx = 500; % cm, longitud losa a lo largo de eje x
Ly = 400; % cm, longitud losa a lo largo de eje y
Lz = 300; % cm, alto de entrepiso a eje de losa
lz = 15; % cm, espesor de losa
ll = 35; % cm, lado largo columna
lc = 25; % cm, lado corto columna

g = 980.665; % cm/s2, valor aceleración de la gravedad asumida
roha = 2.5e-3; % kg/cm3, densidad del hormigón armado
roha = roha*1;%*68.85;
mtl = Lx*Ly*lz*roha; % kg, masa de losa de un piso (unidades de masa)
mtl = mtl/g; % kgf-s2/cm, masa de losa de un piso (unidades de fuerza)
mtln = mtl/4; % kgf-s2/cm, masa de losa de un piso asignada a cada nodo (unidades de fuerza)

%% ensamble matriz de masas

Ml = mtl*nblkdiag(eye(3),zeros(3)); % kgf-s2/cm, matriz masas
concentradas de losa en nodo
M = kron(eye(np*nnodl),Ml);

%% ensamble con matrices elementales para rigidez

Kl = zeros(nnodl*ngdl); % antihorario desde abajo-izq
txk = dlmread('klosa_sap_levo_6x4.txt',' ',1,0);
for i = 1:length(txk)
    Kl(txk(i,1),txk(i,2)) = txk(i,3);
end
Kl = Kl + tril(Kl,-1)';

Kc = zeros(nnodc*ngdl); % i=abajo, j=arriba
txk = dlmread('kcol_sap_6x2.txt',' ',1,0);
for i = 1:length(txk)
    Kc(txk(i,1),txk(i,2)) = txk(i,3);
end
Kc = Kc + tril(Kc,-1)';

```

```

% colocación losas          % antihorario desde abajo-izq
coll = [(1:4:(np*nnodl))' (2:4:(np*nnodl))' (3:4:(np*nnodl))'
(4:4:(np*nnodl))'];
nlosa = size(coll,1);

% colocacion barras:      % i=abajo, j=arriba
colc = [ [((np+1)*nnodl-3):((np+1)*nnodl), 1:((np-1)*nnodl)]', ...
[1:((np)*nnodl)]' ];
nb = size(colc,1);

% nodos con apoyos
nodr = [ (max(colc(:))-3):max(colc(:)) ];

% coordenadas nodos respecto centroide en base: antihorario desde abajo-
izq
coorlosa = [-250 -200 300;
            +250 -200 300;
            +250 +200 300;
            -250 +200 300];
coor = [];
for i = 1:np
    coor = [coor; coorlosa(:,1:2) coorlosa(:,3)*i];
end

% mat rigidez
Ks = zeros(max(colc(:))*ngdl);

% ensamble barras en mat rigidez
for j = 1:nb
    ni = colc(j,1);
    nf = colc(j,2);
    vi = (1:6)+(ni-1)*ngdl;
    vf = (1:6)+(nf-1)*ngdl;
    v = [vi vf];
    Ks(v,v) = Ks(v,v) + Kc;
end

% ensamble losas en mat rigidez
for j = 1:nlosa
    ni = coll(j,1);
    nj = coll(j,2);
    nk = coll(j,3);
    nl = coll(j,4);
    vi = (1:6)+(ni-1)*ngdl;
    vj = (1:6)+(nj-1)*ngdl;
    vk = (1:6)+(nk-1)*ngdl;
    vl = (1:6)+(nl-1)*ngdl;
    v = [vi vj vk vl];
    Ks(v,v) = Ks(v,v) + Kl;
end

posr = [];
for i = 1:length(nodr)
    posr = [posr, (1:6)+(nodr(i)-1)*ngdl];
end

```

```

end
K = Ks;
K(posr,:) = [];
K(:,posr) = [];

% condensacion estática a los GDL con masa
n = length(M);
pc = [];
for i = 1:(n/(ngdl*nnodl))
pc = [pc, (24*(i-1))+(1:3)+6*0, (24*(i-1))+(1:3)+6*1, (24*(i-1))+(1:3)+6*2, (24*(i-1))+(1:3)+6*3];
end
p = 1:n;
p(pc) = [];
[Kpc Mpc H] = condensaKMH(K,M,pc,p);

rb2 = zeros(np*nnodl*3,6);
for i = 1:np
    posf = i*(3*nnodl);
    posi = (i-1)*(3*nnodl)+1;
    rb2(posi:posf,1:3) = kron(ones(nnodl,1),eye(3));
    %
    vpos = (posi-1) + (3:3:(3*nnodl));
    rb2(vpos,4) = +coor((i*nnodl-3):(i*nnodl),2); % +y
    rb2(vpos,5) = -coor((i*nnodl-3):(i*nnodl),1); % -x
    vpos = (posi-1) + (2:3:(3*nnodl));
    rb2(vpos,4) = -coor((i*nnodl-3):(i*nnodl),3); % -z
    vpos = (posi-1) + (1:3:(3*nnodl));
    rb2(vpos,5) = +coor((i*nnodl-3):(i*nnodl),3); % +z
    %
    vpos = (posi-1) + (1:3:(3*nnodl));
    rb2(vpos,6) = -coor((i*nnodl-3):(i*nnodl),2); % -y
    vpos = (posi-1) + (2:3:(3*nnodl));
    rb2(vpos,6) = +coor((i*nnodl-3):(i*nnodl),1); % +x
end

[w T PHI res rxls L GAMMA Mneff Meff pMneff svec] =
pmodal_tg_v4(Kpc,Mpc,rb2);

omegax = T(1)/T(2);
omegay = T(3)/T(2);

for i=1:(length(res)/6)
resumen((1:3)+3*(i-1),:)=res((6*i-5):(6*i),:);
end

uem = zeros(np*nnodl*length(Mpc),3);
for j = 1:length(Mpc)
for i = 1:(np*nnodl)
    uem(i+(j-1)*(np*nnodl),:) = - PHI((3*i-2):(3*i),j)';
end
end

nu = 5/100;

```

```

snvecx=Mpc*PHI*diag(GAMMA(:,1)); % matriz cuyas columnas son los
vectores sn en dirección x
snvecy=Mpc*PHI*diag(GAMMA(:,2)); % matriz cuyas columnas son los
vectores sn en dirección y

namespectro = {'TGespectroCpiso1_0.163011.txt'
'TGespectroCpiso2_0.3318.txt'...
'TGespectroCpiso3_0.51387.txt' '4'...
'TGespectroCpiso5_0.8916.txt'};

TSa = load(namespectro{np}); % lectura espectro
San = interp1(TSa(:,1),TSa(:,2),T); % pseudo aceleraciones
modales máximas
Sdn = San./(w.^2); % desplazamientos
modales máximos

%% RESPUESTAS CONSIDERANDO SISMO EN DIRECCIÓN +X

umaxn = PHI*diag(GAMMA(:,1).*Sdn); % c/col: resp. de c/modo
uddmaxn = PHI*diag(GAMMA(:,1))*diag(San); % acel. max. modales de
cada nodo
Vbmaxn = (Mneff(:,1).*San); % vector con corte basal de
c/modo

umaxnp = -H*umaxn; % desplazamientos condensados (giros)
para c/modo
uddmaxnp = -H*uddmaxn; % aceleraciones de desplazamientos
condensados (giros) para c/modo

% determinación de fuerza ESTÁTICA EQUIVALENTE para c/modo
fsnx = snvecx*diag(San); % con matriz de MASA
fmaxn = Kpc*umaxn; % con matriz de RIGIDEZ
% fmaxn = fsnx;

% determinación de fuerzas basales
Fbmaxn = 0;
Msmaxn = 0;
Mbmaxn = 0; % en la base
for j=1:np
    for i=1:4
        Fbmaxn = fmaxn(((3*i-2):(3*i))+(3*4*(j-1)), :) + Fbmaxn;
        Msmaxn = [0 0 coor(4*(j-1)+i,2);
0 0 -coor(4*(j-1)+i,1);
-coor(4*(j-1)+i,2) coor(4*(j-1)+i,1) 0 ]
        *fmaxn(((3*i-2):(3*i))+(3*4*(j-1)), :) + Msmaxn;
        Mbmaxn = [0 -coor(4*(j-1)+i,3) coor(4*(j-
1)+i,2);
coor(4*(j-1)+i,3) 0 -coor(4*(j-
1)+i,1);
-coor(4*(j-1)+i,2) coor(4*(j-1)+i,1) 0 ]
        *fmaxn(((3*i-2):(3*i))+(3*4*(j-1)), :) + Mbmaxn;
    end
end
for i=1:3
    [Fbmax(i,1),~] =CombCQC_dn02(Fbmaxn(i,:),T,nu);

```

```

[Msmax(i,1),~] =CombCQC_dn02(Msmaxn(i,:),T,nu);
[Mbmax(i,1),~] =CombCQC_dn02(Mbmaxn(i,:),T,nu);
end
Rmax = round([Fbmax', Mbmax'],4);

% determinación de respuestas máximas
for i=1:size(umaxn,1)
    [umaxCQC(i,1),~] =CombCQC_dn02(umaxn(i,:),T,nu);
    [umaxpCQC(i,1),~]=CombCQC_dn02(umaxnp(i,:),T,nu);
    [fmaxCQC(i,1),~] =CombCQC_dn02(fmaxn(i,:),T,nu);
    [uddmaxCQC(i,1),~] =CombCQC_dn02(uddmaxn(i,:),T,nu);
    [uddmaxpCQC(i,1),~] =CombCQC_dn02(uddmaxnp(i,:),T,nu);
end
[VbmaxCQC,~]=CombCQC_dn02(Vbmaxn,T,nu)

% envolvente desp. por piso
for i = 1:np
    for j = 1:3
        envolumax(3*(i-1)+j,1) = max(umaxCQC(j:3:(3*nnodl*i)));
    end
end

for i = 1:(np*nnodl)
    umax_pCQC(i,:) = [umaxCQC((3*i-2):(3*i))', umaxpCQC((3*i-2):(3*i))'];
    uddmax_pCQC(i,:) = [uddmaxCQC((3*i-2):(3*i))', uddmaxpCQC((3*i-2):(3*i))'];
end

%% VERIFICACIÓN CONSIDERANDO EXCENTRICIDAD para sismo en dir X

ex = 0/100; % exc. dir. x en % (der:+, izq:-)
ey = 5/100; % exc. dir. y en % (arr:+, aba:-)

% vector columna, c/fila = peso c/nodo, en c/piso
wmasa = [(0.5-ey)*(0.5-ex); (0.5-ey)*(0.5+ex);
          (0.5+ey)*(0.5+ex); (0.5+ey)*(0.5-ex)]*(2*2);

wmasadir = kron(wmasa,ones(3,1)); % asignación de pesos a c/dir de
analysis
wmasadir = kron(ones(np,1),wmasadir);

Mpce = Mpc * diag(wmasadir);

[we Te PHie rese rxlse Le GAMMAe Mneffe Meffe pMneffe svece] =
pmodal_tg_v4(Kpc,Mpce,rb2);

fmaxen = Mpce * uddmaxn;

umaxen = Kpc\fmaxen;

umaxenp = -H*umaxen; % desplazamientos condensados (giros) para c/modo

% determinación de fuerzas basales
Fbmaxen = 0;

```

```

Msmaxen = 0;
Mbmaxen = 0;          % en la base
for j=1:np
    for i=1:4
        Fbmaxen = fmaxn(((3*i-2):(3*i))+(3*4*(j-1)), :) + Fbmaxen;
        Msmaxen = [0                                0                                coor(4*(j-
1)+i,2);
                    0                                0                                -coor(4*(j-
1)+i,1);
                    -coor(4*(j-1)+i,2)  coor(4*(j-1)+i,1)  0                                ]
        *fmaxn(((3*i-2):(3*i))+(3*4*(j-1)), :) + Msmaxen;
        Mbmaxen = [0                                -coor(4*(j-1)+i,3)  coor(4*(j-
1)+i,2);
                    coor(4*(j-1)+i,3)  0                                -coor(4*(j-
1)+i,1);
                    -coor(4*(j-1)+i,2)  coor(4*(j-1)+i,1)  0                                ]
        *fmaxn(((3*i-2):(3*i))+(3*4*(j-1)), :) + Mbmaxen;
    end
end
for i=1:3
    [Fbmaxe(i,1),~] = CombCQC_dn02(Fbmaxen(i,:),T,nu);
    [Msmaxe(i,1),~] = CombCQC_dn02(Msmaxen(i,:),T,nu);
    [Mbmaxe(i,1),~] = CombCQC_dn02(Mbmaxen(i,:),T,nu);
end

Rmaxe = round([Fbmaxe', Mbmaxe'],4);

for i=1:size(umaxen,1)
    [umaxeCQC(i,1),~] = CombCQC_dn02(umaxen(i,:),T,nu);
    [umaxepCQC(i,1),~] = CombCQC_dn02(umaxenp(i,:),T,nu);
    [fmaxeCQC(i,1),~] = CombCQC_dn02(fmaxen(i,:),T,nu);
end

% envolvente desp. por piso
for i = 1:np
    for j = 1:3
        envolumaxe(3*(i-1)+j,1) = max(umaxeCQC(j:3:(3*nnodl*i)));
    end
end

for i = 1:(np*nnodl)
    umaxe_pCQC(i,:) = [umaxeCQC((3*i-2):(3*i))', umaxepCQC((3*i-
2):(3*i))'];
end

%% RESPUESTAS CONSIDERANDO SISMO EN DIRECCIÓN +Y

umaxyn = PHI*diag(GAMMA(:,2).*Sdn);          % c/col: resp. de c/modo
uddmaxyn = PHI*diag(GAMMA(:,2))*diag(San);    % acel. max. modales de
cada nodo
Vbmaxyn = (Mneff(:,2).*San);

```

```

umaxynp = -H*umaxyn; % desplazamientos condensados (giros)
para c/modo
uddmaxynp = -H*uddmaxyn; % aceleraciones de desplazamientos
condensados (giros) para c/modo

% determinación de fuerza ESTÁTICA EQUIVALENTE para c/modo
fsny = snvecy*diag(San); % con matriz de MASA
fmaxyn = Kpc*umaxyn; % con matriz de RIGIDEZ

% determinación de fuerzas basales
Fbmaxyn = 0;
Msmaxyn = 0;
Mbmaxyn = 0; % en la base
for j=1:np
    for i=1:4
        Fbmaxyn = fmaxyn(((3*i-2):(3*i))+(3*4*(j-1)), :) + Fbmaxyn;
        Msmaxyn = [0 0 coor(4*(j-1)+i,2);
0 0 -coor(4*(j-1)+i,1);
-coor(4*(j-1)+i,2) coor(4*(j-1)+i,1) 0 ]
*fmaxyn(((3*i-2):(3*i))+(3*4*(j-1)), :) + Msmaxyn;
        Mbmaxyn = [0 -coor(4*(j-1)+i,3) coor(4*(j-1)+i,2);
coor(4*(j-1)+i,3) 0 -coor(4*(j-1)+i,1);
-coor(4*(j-1)+i,2) coor(4*(j-1)+i,1) 0 ]
*fmaxyn(((3*i-2):(3*i))+(3*4*(j-1)), :) + Mbmaxyn;
    end
end
for i=1:3
    [Fbmaxy(i,1),~] =CombCQC_dn02(Fbmaxyn(i,:),T,nu);
    [Msmaxy(i,1),~] =CombCQC_dn02(Msmaxyn(i,:),T,nu);
    [Mbmaxy(i,1),~] =CombCQC_dn02(Mbmaxyn(i,:),T,nu);
end
Rmaxy = round([Fbmaxy', Mbmaxy'],4);

% determinación de respuestas máximas
for i=1:size(umaxyn,1)
    [umaxyCQC(i,1),~] =CombCQC_dn02(umaxyn(i,:),T,nu);
    [umaxyPCQC(i,1),~] =CombCQC_dn02(umaxynp(i,:),T,nu);
    [fmaxyCQC(i,1),~] =CombCQC_dn02(fmaxyn(i,:),T,nu);
    [uddmaxyCQC(i,1),~] =CombCQC_dn02(uddmaxyn(i,:),T,nu);
    [uddmaxyPCQC(i,1),~] =CombCQC_dn02(uddmaxynp(i,:),T,nu);
end
[VbmaxyCQC,~] =CombCQC_dn02(Vbmaxyn,T,nu)

% envolvente desp. por piso
for i = 1:np
    for j = 1:3
        envolumaxy(3*(i-1)+j,1) = max(umaxyCQC(j:3:(3*nnodl*i)));
    end
end
end

```

```

for i = 1:(np*nnodl)
    umaxy_pCQC(i,:) = [umaxyCQC((3*i-2):(3*i))',    umaxypCQC((3*i-
2):(3*i))'];
    uddmaxy_pCQC(i,:) = [uddmaxyCQC((3*i-2):(3*i))',    uddmaxypCQC((3*i-
2):(3*i))'];
end

%% VERIFICACIÓN CONSIDERANDO EXCENTRICIDAD para sismo en dir Y

ex = 5/100;    % exc. dir. x en % (der:+, izq:-)
ey = 0/100;    % exc. dir. y en % (arr:+, aba:-)

% vector columna, c/fila = peso c/nodo, en c/piso
wmasa = [(0.5-ey)*(0.5-ex); (0.5-ey)*(0.5+ex);
          (0.5+ey)*(0.5+ex); (0.5+ey)*(0.5-ex)]*(2*2);

wmasadir = kron(wmasa,ones(3,1));    % asignación de pesos a c/dir de
analisis
wmasadir = kron(ones(np,1),wmasadir);

Mpcey = Mpc * diag(wmasadir);

[wey Tey PHIey rese y rxlsey Ley GAMMAey Mneffey Meffey pMneffey svecey] =
pmodal_tg_v4(Kpc,Mpcey,rb2);

fmaxeyn = Mpcey * uddmaxyn;

umaxeyn = Kpc\fmaxeyn;

umaxeynp = -H*umaxeyn;    % desplazamientos condensados (giros) para c/modo

% determinación de fuerzas basales
Fbmaxeyn = 0;
Msmaxeyn = 0;
Mbmaxeyn = 0;    % en la base
for j=1:np
    for i=1:4
        Fbmaxeyn = fmaxeyn(((3*i-2):(3*i))+(3*4*(j-1)), :) + Fbmaxeyn;
        Msmaxeyn = [0                                0                                coor(4*(j-
1)+i,2);
                   0                                0                                -coor(4*(j-
1)+i,1);
                   -coor(4*(j-1)+i,2)  coor(4*(j-1)+i,1)  0                ]
        *fmaxeyn(((3*i-2):(3*i))+(3*4*(j-1)), :) + Msmaxeyn;
        Mbmaxeyn = [0                                -coor(4*(j-1)+i,3)  coor(4*(j-
1)+i,2);
                   coor(4*(j-1)+i,3)  0                                -coor(4*(j-
1)+i,1);
                   -coor(4*(j-1)+i,2)  coor(4*(j-1)+i,1)  0                ]
        *fmaxeyn(((3*i-2):(3*i))+(3*4*(j-1)), :) + Mbmaxeyn;
    end
end
for i=1:3
    [Fbmaxey(i,1),~] = CombCQC_dn02(Fbmaxeyn(i,:),T,nu);
    [Msmaxey(i,1),~] = CombCQC_dn02(Msmaxeyn(i,:),T,nu);

```

```

    [Mbmmaxey(i,1),~] = CombCQC_dn02(Mbmmaxeyn(i,:),T,nu);
end

Rmaxey = round([Fbmmaxey',   Mbmmaxey'],4);

for i=1:size(umaxen,1)
    [umaxeyCQC(i,1),~] =CombCQC_dn02(umaxeyn(i,:),T,nu);
    [umaxeypCQC(i,1),~]=CombCQC_dn02(umaxeynp(i,:),T,nu);
    [fmaxeyCQC(i,1),~] =CombCQC_dn02(fmaxeyn(i,:),T,nu);
end

% envolvente desp. por piso
for i = 1:np
    for j = 1:3
        envolumaxey(3*(i-1)+j,1) = max(umaxeyCQC(j:3:(3*nnodl*i)));
    end
end

for i = 1:(np*nnodl)
    umaxey_pCQC(i,:) = [umaxeyCQC((3*i-2):(3*i))',   umaxeypCQC((3*i-
2):(3*i))'];
end

```

Tabla B-2: Código para condensación estática.

```
function [Kpc Mpc H] = condensaKMH(K,M,pc,p)

% p : gdl a condensar
% pc: gdl condensados

% Condensacion matriz rigidez
H = K(p,p)\K(p,pc);
Kpc = K(pc,pc) - K(pc,p)*H;
% condensacion para matriz de masa
Mpc = M(pc,pc) -H'*M(p,pc) -M(pc,p)*H+H'*M(p,p)*H;
```

Tabla B-3: Código para determinación de propiedades modales.

```

function [w T PHI res rxls L GAMMA Mneff Meff pMneff svec] =
pmodal_tg_v4(K,M,rb)

g = 9.80665;          % m/s2
n=length(M);
[PHI, W2] = eig(K,M);          % obtención de los vectores y valores
proprios
[w2, posw2_ini] = sort(diag(W2)); % Hz^2, vec. frec. oscilatorias al
cuadrado, orden ascendente
PHI = PHI(:,posw2_ini);          % vectores propios ordenados en
correspondencia a las frecuencias
w = w2.^0.5;          % Hz, vector con frecuencias
oscilatorias
T = (2*pi)./w;          % s, vector con los periodos de la
estructura
res = [ (1:n)' w T];          % resumen modos, frecuencias,
periodos
rxls = [w'; T'; PHI];          % resumen para pegar en formato de
excel

for i = 1:n          % normalizacion respecto a la masa
    PHI(:,i) = PHI(:,i)/sqrt(PHI(:,i)' *M* PHI(:,i));
end

Mas = PHI' *M* PHI;          % tonf*s^2/cm, matriz masa de ec.
diferencial modal
Kas = PHI' *K* PHI;          % tonf/cm, matriz rigidez de ec.
diferencial modal

L = PHI'*M*rb;          % tonf*s^2/cm,
GAMMA = Mas\L;
Mneff = Mas\ (L.^2);          % tonf*s^2/cm, masa modal efectiva en dir de
análisis de c/modo
Meff = GAMMA'*Mas*GAMMA;          % masa total efectiva en la dirección de
análisis
Meff = diag(diag(Meff));
pMneff = (Mneff*inv(Meff))*100;          % porcentaje de masa efectiva

for i = 1:size(rb,2)
    aux(:, (1:n)+n*(i-1)) = diag(GAMMA(:,i));
end

svec=M*PHI*aux;

end

```

Tabla B-4: Código para la creación del espectro de pseudoaceleración según NCh433.

```

% ESPECTRO NORMA NCh-433 ds61

clc; clear all; close all;

% #####
Tas = [0 0.331846486990623 0.513872818131823 0 0.891618878416343];
Tas = Tas(5); % período con mayor masa en direccion analisis
% #####

g = 981; % cm/s2
% suelo C - Concepción (zona 3) - tabla 6.3
S = 1.05;
To = 0.4;
n = 1.4;
p = 1.6;
Ao = 0.4*g;

I = 1;
Tn = 0:0.01:5;
alphaf = @(T) (1+4.5*(T/To).^p)./(1+(T/To).^3);

Ro = 11; % HA (tabla 5.1)
Ras = 1+Tas/(0.1*To+Tas/Ro);

acelmin = I*S*Ao/(6) % cm/s2 (6.3.7.1)
Cmin = S*Ao/(6*g)
Cmax = 0.35*S*Ao/g % tabla 6.4
acelmax = I*Cmax*g % cm/s2 (6.3.7.2)

Sa = S*Ao*alphaf(Tn)/(Ras/I);% (6.3.5.1)
aux = [Tn' Sa'];
% save('TGespectroCpiso2_0.3318.txt','aux','-ascii')
save('TGespectroCpiso5_0.8916.txt','aux','-ascii')

figure
plot(Tn,Sa,'b')
xlabel('Tn (s)')
ylabel('Sa (cm/s2)')
legend('\xi=5%', 'Location', 'best')
grid on

```

Tabla B-5: Código para la combinación modal CQC.

```

function [rcomb,rij]=CombCQC_dn02(rmodo,T,nu)

% rmodo: Vector con la respuesta de cada modo
% T: Vector con el periodo de cada modo
% nu: factor de amortiguamiento crítico
% rcomb: Respuesta combinada
% rij: Matriz con los coeficientes de correlación del método CQC

nm=length(T);           % no. de modos

rij=zeros(nm,nm);
sum=0;
rcomb=0;
for i=1:nm
    for j=1:nm
        beta=T(i)/T(j);
        aux=(1+beta)*((1-beta)^2)+4*(nu^2)*beta*(1+beta);
        rij(i,j)= 8*(nu^2)*(beta^1.5)/aux;
        sum=rij(i,j)*rmodo(i)*rmodo(j)+sum;
    end
end

rcomb=sqrt(sum);

```