



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE  
ESCUELA DE INGENIERÍA

# **USO DE TECNICAS DE INSPECCION NO DESTRUCTIVA BASADAS EN GROUND PENETRATING RADAR**

**MAURICIO RENE CHORRO**

Informe de Actividad de Graduación para optar al Grado de  
Magíster en Ingeniería Estructural y Geotécnica

Profesor Supervisor:  
**SERGIO GUTIERREZ CID**

Santiago de Chile, abril, 2020.

A Dios, mi esposa, hijo y mi madre,  
que me apoyaron mucho...

## **AGRADECIMIENTOS**

Un logro alcanzado gracias a la divina misericordia y amor de Dios, que me guio e ilumino durante este arduo camino, que junto con el apoyo y el amor de mi esposa Sara, mi hijo Felipe, y el de mi madre Blanca Estela, he logrado culminar con éxito este gran esfuerzo del cual ahora comparto con mi familia a quienes más amo y a quienes espero retribuir con mucha alegría todo el apoyo incondicional recibido.

Agradezco también al resto de mi familia y familia de mi esposa quienes desde la distancia me han mostrado su incondicional ayuda y cariño; así como también agradezco el apoyo recibido por parte de las entidades gubernamentales de mi país, Ministerio de Obras Publicas de El Salvador, y al gobierno de Chile a través de la Agencia Chilena de Cooperación Internacional para el Desarrollo, AGCID.

Finalmente agradezco todo el soporte técnico y académico recibido por parte de mi supervisor el Profesor Sergio Gutiérrez y del Doctor Giovanni Menanno, de haberme permitido ser parte de su equipo de investigación del proyecto 1181392 de FONDECYT, y haberme guiado para alcanzar con éxito los objetivos de la actividad de graduación, junto con la valiosa coloración y ayuda del personal administrativo y académico del programa del Magister de la Pontificia Universidad Católica de Chile quienes representan la cordialidad y fraternidad de este hermoso país Chile que lo llevo en mi mente y corazón a mi país de origen.

## INDICE GENERAL

Pág.

DEDICATORIA.....	ii
AGRADECIMIENTOS .....	iii
INDICE DE TABLAS .....	vi
INDICE DE FIGURAS.....	vii
RESUMEN.....	viii
ABSTRACT .....	ix
I. INTRODUCCION.....	10
I.1 Introducción .....	10
I.1.1 Objetivos generales.....	11
I.1.2 Objetivos específicos .....	11
I.1.3 Alcances .....	12
II. GEORADAR (GROUND PENETRATING RADAR – GPR).....	13
II.1 Introducción .....	13
II.2 Metodología de prospección .....	13
II.3 Historia del GPR .....	14
II.4 Generalidades del georadar .....	14
II.5 Fundamentos teóricos del GPR.....	18
II.5.1. Ecuaciones de Maxwell .....	18
II.6. Parámetros electromagnéticos.....	19
II.6.1 Conductividad.....	20
II.6.2 Permitividad dieléctrica.....	20
II.6.3 Permeabilidad .....	20
II.6.4 Velocidad de propagación y longitud de onda .....	21
II.6.5 Longitud de onda en un medio diferente del vacío .....	22
II.6.6 Factor de atenuación.....	23
II.6.7 Reflexión y Refracción.....	23
II.6.8 Ecuación del GPR.....	25

II.7. Procesamiento de información del GPR .....	26
II.7.1 Filtros .....	27
II.7.2 Deconvolución predictiva.....	30
II.7.3 Migración.....	31
II.7.3 Transformada Rápida de Fourier (TDF).....	31
II.7.4 Transformada de Hilbert.....	32
II.7.5 Procedimiento de corrección de señal .....	33
III. PROCESAMIENTO DE DATOS GEORADAR: LOSETAS DE HORMIGON Y BLOQUES DE MAMPOSTERIA.....	36
III.1 Descripción del procedimiento desarrollado .....	36
III.2 Obtención de datos mediante realización de ensayo no destructivo.....	37
III.3 Procesado típico de datos de georadar .....	40
III.4 Obtención de imágenes en losetas e interpretación de resultados .....	47
III.5 Obtención de imágenes en muro e interpretación de resultados.....	61
IV. MODELACION NUMERICA GPR PROBLEMA DIRECTO. ....	67
IV.1 Diferencias finitas: generalidades.....	67
IV.2 Aproximación de los operadores diferenciales mediante diferencias finitas. Caso de una variable. ....	68
IV.3 Método de FDTD generalidades.....	71
IV.4 Método Elementos Finitos generalidades.....	74
IV.5 Combinación del Método de Diferencia Finitas con Método de Elementos Finitos para la resolución de la ecuación diferencial de onda. ....	75
IV.5 Aplicación del método de combinación de Diferencias Finitas con Elementos Finitos, mediante FREE FEM. ....	79
V. CONCLUSIONES.....	86
BIBLIOGRAFIA.....	88
A N E X O S.....	90
Anexo A : Rutina de calculo en freefem para propagacion directa de onda en un medio homogeneo.....	91

## INDICE DE TABLAS

	Pág.
Tabla II.1: Constantes dieléctricas relativas (ASTM D4748).....	41
Tabla III-1: Listado de losetas ensayadas con GPR y descripción .....	41

## INDICE DE FIGURAS

	Pág.
Figura II-1: Diagramas esquemáticos de radar de impulsos y de radar de onda <sup>1</sup> .....	15
Figura II-2: Medición de un perfil con antenas de desplazamiento <sup>2</sup> .....	16
Figura II-3: Obtención de Imágenes a través del GPR ensayo en suelo. ....	17
Figura II-4: Emisión y recepción de una onda electromagnética.....	24
Figura III-1: Imagen de componentes que conforman el equipo MALA CX.....	37
Figura III-2: Ilustración de cuadrícula guía para toma de lecturas de GPR.....	38
Figura III-3: Imagen de desplazamiento de la antena y toma de lecturas. ....	39
Figura III-4: Panel de opciones de importación en ReflexW.....	43
Figura III-5: Edición de datos importados en ReflexW.....	44
Figura III-6: Exportación de datos procesados ordenados y compatibilizados.....	45
Figura III-7: Definición de parámetros de procesamiento y filtrado en Reflex3DScan. ....	46
Figura III-8: 1) Loseta con una barra de 10mm de diámetro de 40cm 2) Loseta con dos barras de 10mm de diámetro topándose al centro de la losa de 20cm cada una. ....	48
Figura III-9: 3) Loseta con dos barra una de 8mm y otra de 4mm de diámetro de 40cm 4) Loseta con dos barras de 10mm de diámetro con 6cm de traslape al centro de la losa de 20cm cada una. ....	50
Figura III-10: 5) Loseta con listón de madera de 40cm 6) Loseta con dos pelotas de pin pon topándose a 2 cm al centro de la losa. ....	52
Figura III-10: 7) Loseta rellena con cuadrado de polietileno al centro 8) Loseta compuesta de dos tipos de hormigón distinto. ....	54
Figura III-11: 9) Loseta de dos hormigones iguales vaciados en momentos distintos 10) Loseta con fisuras superficiales.....	57
Figura III-12: 11) Loseta con tubo de PVC de diámetro 20mm y 40cm de longitud 12) Loseta con dos bloques de ladrillos de concreto. ....	59
Figura III-13: Elevación estructural de muro de ensayo con GPR( dimensiones en mm). .....	62
Figura III-14: Elevación estructural de muro y superposición de resultado de imagen de radar de ensayo con GPR. ....	63
Figura III-15: Imagen de radar ampliada de muro corto.....	64
Figura III-16: Imagen de radar ampliada de muro largo. ....	65
Figura IV-1: Discretización en región espacio tiempo de interés. ....	68
Figura IV-2: Interpretación grafica de la derivada diferencias finitas centradas. ....	71
Figura IV-3: Diagrama esquemático de posición del vector de campo eléctrico y magnético. ....	72
Figura IV-4: Discretización de un espacio en elementos triangulares. ....	75

## RESUMEN

El uso de Georadar de penetración, es una herramienta electromagnética no destructiva, de aplicación en la ingeniería, que se utilizó para realizar ensayos no destructivos en losetas de hormigón que en su interior poseen objetos embebidos, con la finalidad de determinar la eficacia del método de medición y del equipo utilizado para encontrar la ubicación de dichos objetos. Además se realizaron ensayos de medición en una pared de bloques de mampostería de hormigón, en búsqueda de deficiencia de la cantidad de mortero (grout) colocado en las juntas (sisas) entre bloques y la colocación de relleno de mortero (grout) en las celdas de bloque que contienen barras de acero de refuerzo vertical en su interior. Para el caso de las losetas de hormigón se colocaron en su interior una variedad de objetos de características de alta conductividad y permeabilidad eléctrica como es el caso del acero respecto al hormigón así como también objetos de baja o similar conductividad eléctrica a la del hormigón como es el caso del PVC, la madera y el polietileno, del cual los resultados fueron positivos, por lo que en todos los ensayos se pudo determinar la existencia y ubicación del objeto embebido, y en cuanto al caso de los bloques de hormigón, se obtuvieron imágenes claras y precisas de la composición interna de la pared, al observarse claramente las zonas con existencia de llenado de grout, y en las zonas donde hay vacíos así como también la ubicación y existencia de barras de acero horizontales que se colocan entre la sisa de unión de hiladas de bloques de hormigón, se determinaron que su ubicación se encontraba tal cual se estableció en los planos de construcción, demostrando la capacidad de medición del método y del equipo utilizado y de la metodología empleada para el procesamiento y generación de imágenes de escaneo del interior de los cuerpos ensayados como producto final del resultado del ensayo no destructivo. Finalmente se presenta un estudio general y básico de modelación numérica de la propagación de onda en un medio homogéneo mediante la técnica de Diferencias finitas implícitas del tiempo combinado con Elementos Finitos en el espacio, del cual se corroboró que es una manera muy potente de realizar una simulación numérica del fenómeno de propagación de onda.

## **ABSTRACT**

The use of Ground Penetrating Radar, is a non-destructive electromagnetic tool, applied in engineering, which was used to perform non-destructive tests on concrete tiles that have embedded objects inside, in order to determine the effectiveness of the method of measurement and of the equipment used to find the location of said objects, in addition measurement tests were carried out on a wall of concrete masonry blocks, in search of deficiency of the amount of mortar (grout) placed in the joints (armholes) between blocks and the placement of mortar fill (grout) in the block cells containing vertical reinforcing steel bars inside. In the case of concrete tiles, a variety of objects with characteristics of high conductivity and electrical permeability were placed inside, such as steel with respect to concrete as well as objects of low or similar electrical conductivity to that of concrete, such as the case of PVC, wood and polystyrene, of which the results were positive, so that in all the tests it was possible to determine the existence and location of the embedded object, and as for the case of the concrete blocks, clear images were obtained and precise of the internal composition of the wall, when the areas with grout filling existence are clearly observed, and in the areas where there are gaps as well as the location and existence of horizontal steel bars that are placed between the connecting armhole of concrete block runs, it was determined that its location was as it was established in the construction plans, demonstrating the measuring ability of the method and equipment used and the methodology used for the processing and generation of scan images inside the bodies tested as the final product of the result of the non-destructive test. Finally, a general and basic study of numerical modeling of wave propagation in a homogeneous medium is presented by means of the technique of implicit finite differences of time combined with Finite Elements in space, of which it is corroborated that it is a very powerful way to perform a Numerical simulation of the wave propagation phenomenon.

## **I. INTRODUCCION**

La técnica del georadar (en inglés Ground Penetrating Radar – GPR), es un método no destructivo para la investigación de materiales compuestos, tal es el caso del hormigón armado, la mampostería de hormigón armada y el subsuelo terrestre por mencionar unos cuantos. Se denomina ensayo no destructivo al que permite inferir algunas características y estructura interna de un material sin destruir o afectar el material en estudio y, en base a esta información, deducir algo sobre su calidad. El origen de esta técnica se remonta a la década de los 70's del siglo XX, cuya aplicación inicial fue principalmente en las áreas de geología y arqueología.

### **I.1 Introducción**

El georadar es un equipo compuesto por una antena trasmisora de ondas electromagnéticas, una antena receptora, una unidad de control y almacenamiento de datos y en algunos casos posee dispositivos de visualización. La técnica consiste en la generación de un tren de pulsos electromagnéticos de corta duración que genera ondas que se propagan a través de las capas que conforman un material compuesto y posteriormente son detectadas en la superficie a través de la antena receptora; los límites o interfaces de los diversos tipos de materiales presentes en la muestra compuesta de estudio, que separan porciones con diferentes propiedades electromagnéticas (permitividad dieléctrica y conductividad), generan reflexiones de las ondas que a su vez son captadas por el receptor. En base a las señales registradas se puede identificar desde la presencia de materiales de diferente propiedad hasta cuerpos líquidos o vacíos.

El presente trabajo busca evaluar algunas de las características de la técnica de georadar para su empleo práctico en proyectos de ingeniería civil, tomando como aspecto clave el análisis de los valores numéricos captados por este tipo de equipo en una prospección real del material compuesto, el cual para este trabajo ha sido el hormigón armado y la mampostería de hormigón armada el caso de estudio.

### **I.1.1 Objetivos generales**

Desarrollar entendimiento sobre el uso y aplicación de la técnica de ensayos no destructivos a través del GPR, de manera de entender a claridad el concepto físico que acontece en las mediciones realizadas en el ensayo, y así poder optimizar resultados mediante el uso e implementación de la modelación numérica para la simulación de ondas electromagnéticas viajando entre dos materiales de permitividad dieléctrica distinta, en un espacio de dos dimensiones, aplicando la teoría de diferencias finitas y elementos finitos, y comparar los resultados analíticos con respecto a ensayos experimentales realizados con equipo de GPR.

### **I.1.2 Objetivos específicos**

Conocer el fundamento teórico y el manejo de los datos obtenidos mediante la técnica no destructiva de medición realizada por el GPR, mediante el desarrollo de criterios que permitan interpretar de forma correcta los registros obtenidos de las mediciones realizadas a probetas de hormigón y bloques de mampostería.

Evaluar la composición interna de un medio heterogéneo por lo que se han fabricado probetas en forma de losetas cuadradas de espesor constante de hormigón con diversas propiedades, para realizar en ellas ensayos no destructivos mediante el uso de la técnica del GPR, de manera tal que permite analizar y comparar las losetas entre sí; e identificar en ellas la existencias de porciones de volúmenes con vacíos, existencia de objetos embebidos en el hormigón de propiedades dieléctricas distintas y ver la potencia del ensayo para el caso de la existencia de materiales de similares propiedades dieléctricas, así como también permitan evaluar su interacción con la onda electromagnética que emite el pulso del GPR.

Comprobar la capacidad de la técnica de ensayo no destructivo para determinar o detectar las diferencias en el hormigón para cada uno de los casos de análisis definidos en las probetas de estudio.

Comprender los resultados de los ensayos no destructivos realizados mediante el uso del GPR, con modelación numérica de un espacio definido en dos dimensiones, mediante la técnica numérica de discretización de diferencias finitas y elementos finitos para la solución de la ecuación diferencial de onda electromagnética de Maxwell.

### **I.1.3 Alcances**

Realizar ensayos no destructivos a través del uso del equipo MALA CX de Guideline Geo, georadar de penetración para uso en sistemas estructurales; el cual para el presente trabajo de investigación ha sido utilizado en losetas de hormigón construidas con elementos embebidos en su interior, tal es el caso de barras de acero, objetos de madera, objetos de polietileno y objetos de cloruro de polivinilo.

Presentar una metodología de medición y procesado de datos medidos con el equipo MALA CX de Guideline Geo, y exponer un análisis e interpretación del procesamiento y visualización de los datos medidos haciendo uso de la herramienta computacional comercial REFLEXW de Sandmeier, la cual tiene una interfaz gráfica y amigable con el usuario para el manejo de los datos medidos y que son importados desde una amplia variedad de formatos de lectura de archivo los cuales pueden ser provenientes de mediciones realizadas de una amplia gama de equipos de georadar.

Presentar el procedimiento de la solución numérica de la ecuación de onda a través de la metodología de diferencias finitas y elementos finitos, para realizar la comparación de resultados de un modelo analítico similar al de condiciones reales evaluadas con el equipo de georadar. Para ello se hace uso de rutinas de cálculo elaboradas por el Profesor Sergio Gutiérrez en el lenguaje de programación computacional FreeFem.

## **II. GEORADAR (GROUND PENETRATING RADAR – GPR)**

### **II.1 Introducción**

En este capítulo se describe el Radar de Penetración del Suelo (GPR), en algunos casos llamado georadar, o radar de penetración terrestre, es una técnica geofísica electromagnética no invasiva para la exploración del sub-suelo o materiales compuestos para su caracterización y monitoreo (Olhoeft, 2006). Por tanto, el GPR se aborda desde una perspectiva global a fin de conocer sus características generales, composición, principios básicos de funcionamiento, sus aplicaciones y formas de procesamiento de datos.

### **II.2 Metodología de prospección**

La aplicación de metodologías de prueba y evaluación no destructivas en la Ingeniería Civil, ha planteado un creciente interés en los últimos años debido a su impacto potencial en diversos escenarios. Como consecuencia de ello, las tecnologías GPR han sido ampliamente adoptadas como un instrumento para la inspección de la estabilidad estructural de los edificios y para la detección de grietas y huecos. El GPR se define como “una serie de técnicas electromagnéticas diseñadas principalmente para la ubicación de objetos o interfaces enterrados bajo la superficie de la tierra o ubicados dentro de una estructura visualmente opaca” (Salucci, et al., 2014, p. 1).

Los ensayos no destructivos permiten analizar las estructuras de hormigón armado y mampostería, con el fin de determinar deficiencias, defectos, exfoliaciones y fracturas. En el campo de la Ingeniería, se utiliza para probar los procesos de construcción y mantenimiento de edificios y de componentes individuales, con el fin de reducir el tiempo de análisis y los costes de intervención (Capozzoli, et al., 2014).

### **II.3 Historia del GPR**

El primer monitoreo con radar de penetración de subsuelo o georadar, fue realizado en Austria por el investigador Stern en 1929, teniendo como propósito de este ensayo la determinación de la profundidad de un glaciar. La tecnología fue olvidada (a pesar de las más de 36 patentes presentadas entre 1936 y 1971) hasta después de 1950, cuando los radares de la Fuerza Aérea de E.E.U.U. veían cómo al intentar desembarcar aviones en Groenlandia, uno de los mismos no pudo detectar una formación de hielo, estrellándose contra el suelo. Este incidente marca el inicio de las investigaciones sobre la capacidad del radar para ver el interior de las sub-superficies, no solo en el hielo, sino también para realizar cartografías del subsuelo y nivel freático. En 1967, un sistema muy similar al original de Stern para sondear el glaciar fue propuesto y eventualmente construido y puesto en marcha como experimento para evaluar las propiedades eléctricas de la superficie de la luna en el Apollo 17.

Antes de 1970, si quería inspeccionarse el suelo tenía que ser construido el sistema por los interesados, pero en 1972, Rex Monrey y Art Drake iniciaron la venta de un sistema comercial de GPR. A partir de este momento comienza la explosión de aplicaciones, publicaciones e investigaciones, en gran parte por los contratos del Geological Survey de Canadá, la U.S. Army Cold Regions Research and Engineering Laboratory (CRREL), entre otros (Olhoeft, 2000).

### **II.4 Generalidades del georadar**

En la teoría del GPR, tres términos importantes están interconectados entre sí, como son la frecuencia, la constante dieléctrica (también conocido como coeficiente de reflexión) y la resolución. Como reglas generales, cuanto mayor es la frecuencia de la señal, más corta es la longitud de onda; cuanto mayor es la constante dieléctrica de los objetivos, menor es el área de la huella cubierta por la antena y viceversa. Con base en lo anterior, existen dos tipos principales de GPR, que se clasifican según el tipo de señal transmitida, como se muestra en la Figura II-1.

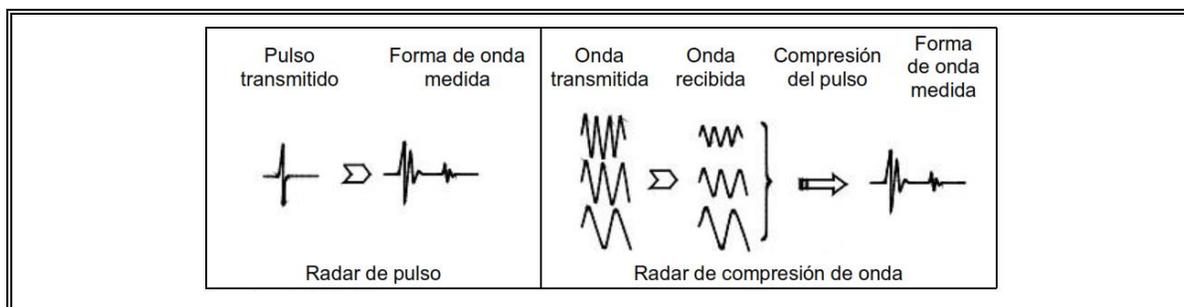


Figura II-1: Diagramas esquemáticos de radar de impulsos y de radar de onda<sup>1</sup>

El tipo más utilizado es el radar de pulso y funciona mediante la transmisión de numerosos pulsos pequeños (típicamente 50 a 100 pulsos por segundo) de corta duración (normalmente 1 a 10 nanosegundos), de onda de radio no sinusoidal de banda ancha. Los sistemas GPR de pulso son más fáciles de fabricar y por lo tanto son menos costosos; sin embargo, están normalmente limitados por la potencia de señal media que se puede transmitir. Otro tipo de GPR de menor uso es de onda continua (CW-GPR), que utiliza ondas de radio sinusoidales de una sola frecuencia.

Casi todos los sistemas GPR comerciales utilizan antenas dipolares accionadas por voltaje. Con el fin de alcanzar mayores profundidades de penetración, se está investigando la posibilidad de utilizar la antena movida por corriente (Harmuth, 2007), que tienen el potencial de lograr un kilómetro de profundidad de penetración en roca. El GPR se puede utilizar tanto en los modos de reflexión como de transmisión. El método de perfilado por reflexión es el más común y normalmente se lleva a cabo utilizando dos antenas (llamado el modo de bi-estático), con un transmisor (Tx) y un receptor (Rx) separados, como se muestra la Figura II-2.

<sup>1</sup>JELF, R.; (2007); *Schematic Diagrams of Pulse Radar and Continuous Wave Radar*[figure 1], pp.104, USA.

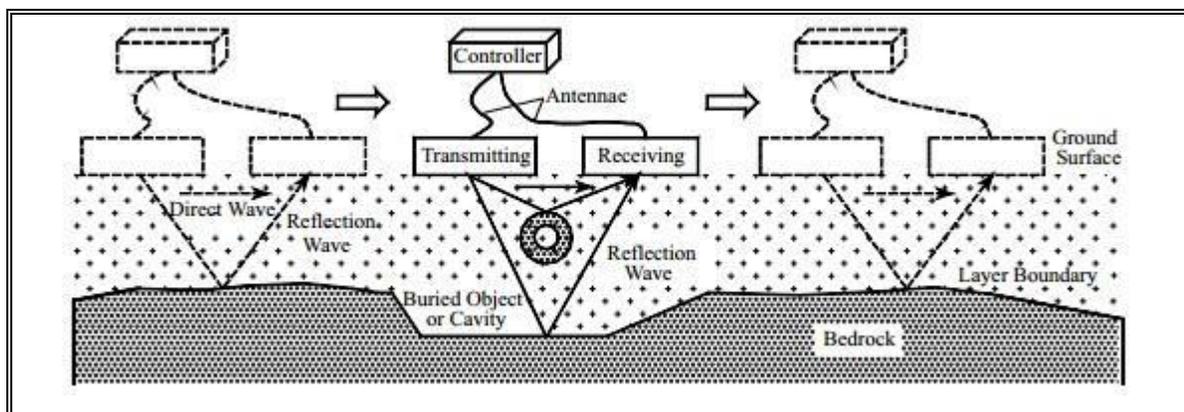


Figura II-2: Medición de un perfil con antenas de desplazamiento<sup>2</sup>

Estas antenas se colocan directamente sobre la superficie del terreno a medir y se pueden montar en un carro con ruedas para proteger el equipo y para acelerar la medición. El tamaño físico de las antenas varía considerablemente de unos 100 mm (1,5 GHz) para la inspección de hormigón, a 3 m (25 MHz) para aplicaciones geológicas profundas. Para alcanzar la mayor frecuencia de las antenas, el Tx y el Rx normalmente se combinan dentro de una caja llamada transductor. Las reflexiones de radio producidas por los objetos presentes en el suelo son detectadas por la unidad receptora y se amplifican y se muestran en la unidad de control. Las reflexiones ocurren en los puntos en donde se presenta un cambio en las propiedades dieléctricas de dos capas adyacentes través de un límite del suelo o una interfaz de material. El georadar puede proporcionar información sobre la localización exacta (posición y profundidad) del objeto detectado. Esta técnica, presenta como ventaja, además, su mayor poder de resolución y la posibilidad de detectar objetos no magnéticos (Busquet, E.; Casas, A.; et al; 1996). La respuesta del medio a las señales emitidas, captada en tiempos determinados, se denomina traza, la cual contiene las características electromagnéticas del medio atravesado.

<sup>2</sup>JELF, R.; (2007); *Measurement of a 2D GPR Profile using constant-offset Tx and Rx antennae*[figure 2], pp.105, USA.

La sucesiva acumulación de estas trazas genera lo que se ha denominado radargrama, la cual para ser visualizada, se suele presentar en escalas de colores, generando las imágenes. Este último aspecto es de particular interés en este documento, debido a que el análisis del mismo se realiza tomando esta clasificación como punto de partida. En la Figura II-3, se presenta de manera esquemática los principios de funcionamiento del georadar y la obtención de imágenes resultado de la prospección por este método para el caso de ensayo realizado en el suelo.

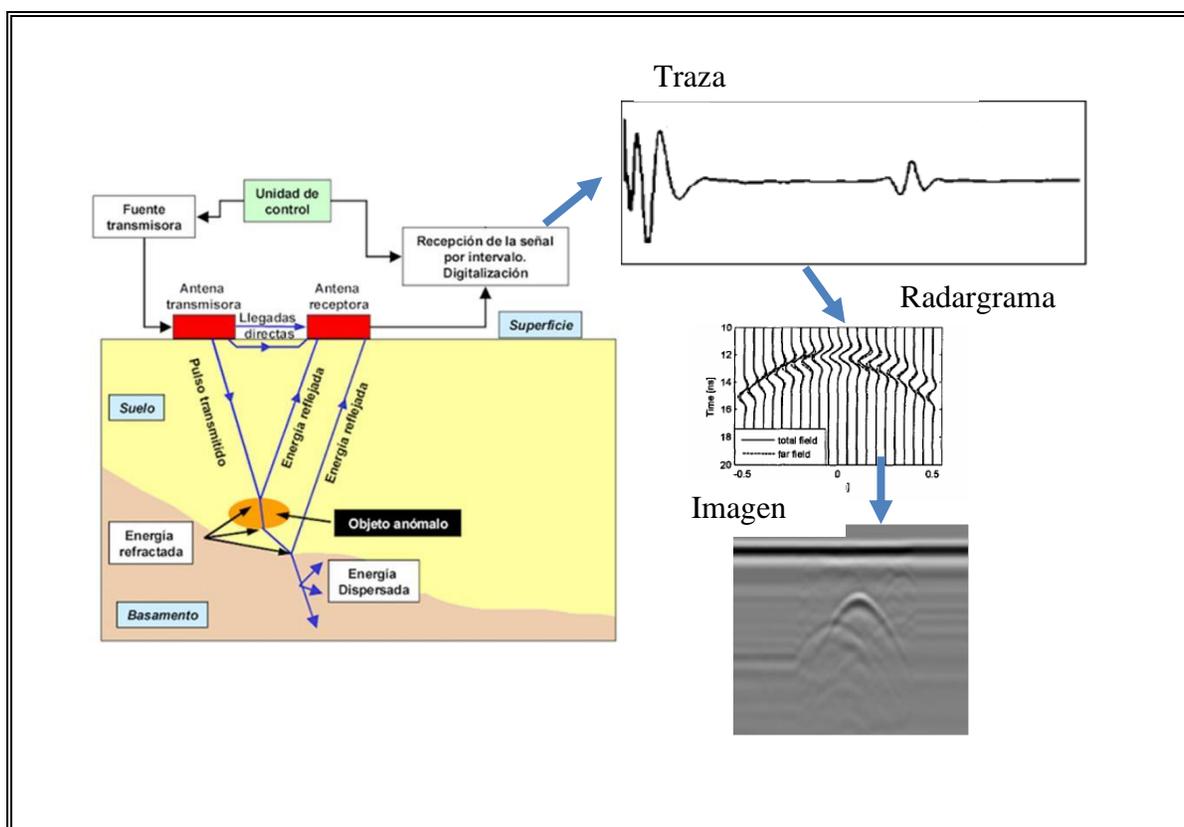


Figura II-3: Obtención de Imágenes a través del GPR ensayo en suelo.

Como se puede observar en la Figura II-3, la antena emisora envía una señal al suelo, la cual puede sufrir reflexión, refracción o difracción. Cuando la onda radiada encuentra heterogeneidades en las propiedades eléctricas de los materiales del

terreno, parte de la energía se refleja hacia la superficie y otra parte se transmite, alcanzando mayor profundidad. La señal reflejada es amplificada, transformada al espectro de audio-frecuencia y registrada directamente en un equipo informático, donde puede ser visualizada casi en tiempo real durante las labores de prospección. Este tipo de equipos permiten cierto procesamiento preliminar de los datos durante la prospección, permitiendo de esta forma obtener resultados directamente en campo, aunque sea necesario un posterior post-procesamiento.

Habitualmente, cuando las estructuras buscadas presentan una constante dieléctrica relativa importante y una dada geometría, puede someterse los perfiles a filtrado intenso de las señales (background removal, dc stacking, tracking) de forma que se obtienen las típicas anomalías en forma de hipérbola (hipérbolas de difracción). Sin embargo, en casos en que existen anomalías de desarrollo vertical (anomalías causadas por reflexiones múltiples) la constante eléctrica relativa es mucho mayor y no pueden discriminarse directamente unas anomalías de otras. Con la aplicación de un filtrado intenso puede perderse información sobre los elementos reflectores planos, que pasarían desapercibidos con este tipo de filtrado, y se pierde capacidad de discriminación entre anomalías hiperbólicas y de desarrollo vertical.

## **II.5 Fundamentos teóricos del GPR.**

### **II.5.1. Ecuaciones de Maxwell**

Las ecuaciones de Maxwell son la base teórica en la que se sustenta el fenómeno, en conjunto con las denominadas ecuaciones constitutivas, que relacionan la intensidad del campo eléctrico y magnético con el desplazamiento eléctrico y la inducción magnética, respectivamente, permitiendo correlacionar las interacciones entre las ondas electromagnéticas y los medios en los cuales se propagan. A continuación se presentan las ecuaciones de Maxwell.

$$\nabla \vec{D} = \rho_f \quad (2.1)$$

$$\nabla \vec{B} = 0 \quad (2.2)$$

$$\nabla \vec{E} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{H} \quad (2.3)$$

$$\nabla \vec{B} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} \quad (2.4)$$

Donde E y H representan respectivamente el campo eléctrico y magnético; D y B el vector desplazamiento eléctrico y vector inducción magnética;  $\rho$  la densidad de carga libre y J la densidad de corriente. Este sistema de ecuaciones en conjunto con las ecuaciones de continuidad, las cuales se presentan a continuación, permite el entendimiento de las interacciones entre las ondas electromagnéticas y los medios en los cuales se propagan.

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (2.5)$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu} \quad (2.6)$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (2.7)$$

Este sistema de ecuaciones contiene los tres parámetros que caracterizan un medio electromagnéticamente:  $\epsilon$ ,  $\sigma$ ,  $\mu$ . La conductividad  $\sigma$  representa la medida de la capacidad de un material de conducir corriente eléctrica. La permitividad dieléctrica  $\epsilon$  brinda la medida de la capacidad de polarización de un material en presencia de un campo eléctrico. Finalmente, la medida de la capacidad de un medio para atraer los campos magnéticos viene descrita por la permeabilidad magnética  $\mu$ .

## II.6. Parámetros electromagnéticos

Los parámetros electromagnéticos (conductividad, permitividad dieléctrica y permeabilidad), son los que definen un medio al paso de una onda electromagnética.

### II.6.1 Conductividad

La conductividad eléctrica es la medida de la capacidad de un material para conducir corriente eléctrica. Es decir, expresa la respuesta de las cargas libres de un medio en presencia de un campo eléctrico externo, siendo el factor de proporcionalidad entre el campo libre aplicado y la densidad de volumen de corriente debido al movimiento de estas cargas libres. Según la ley de Ohm descrito en la ecuación 2.7

La unidad de medida de la conductividad, en el S.I., es el Siemens/metro. En general se puede distinguir entre materiales conductores, semiconductores y aislantes. Los conductores son aquellos cuya conductividad es mayor a  $10^5$  S/m, mientras que los materiales que presentan una conductividad menor a  $10^{-8}$  S/m se clasifican como aislantes, siendo los semiconductores aquellos cuya conductividad se encuentre entre esos valores. (Pérez, 2001)

### II.6.2 Permitividad dieléctrica

La permitividad dieléctrica absoluta  $\epsilon$  es una constante de proporcionalidad entre la intensidad del campo eléctrico externo aplicado y el vector desplazamiento eléctrico  $D$ , mostrada en la ecuación 2.5. La permitividad absoluta,  $\epsilon$  (F/m en el S.I.) se define como el producto entre una permitividad relativa del material ( $\epsilon_r$ ) y la permitividad dieléctrica del vacío ( $\epsilon_0=8.854 \times 10^{-12}$  F/m).

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r \quad (2.8)$$

La permitividad dieléctrica relativa es una constante adimensional que expresa la capacidad de polarización de un material en presencia de un campo eléctrico. En el vacío tiene valor 1. Ver tabla II.1 valores recomendados por la ASTM D4748, de constante relativa dieléctrica para materiales comunes en el área de la ingeniería civil.

### II.6.3 Permeabilidad

La permeabilidad magnética es la capacidad que presenta un material para atraer o hacer pasar a través suyo un campo magnético. Este parámetro  $\mu$  relaciona la

inducción magnética  $B$ , con la intensidad de campo magnético  $H$ , mostrado en la ecuación 2.6.

La permeabilidad absoluta  $\mu$  se puede escribir como el producto entre la permeabilidad magnética del vacío ( $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  H/m) y la permeabilidad relativa del material:

$$\mu = \mu_0 \mu_r \quad (2.9)$$

En la mayor parte de los materiales que nos encontremos en los estudios con georadar (excepto en aquellos que contengan materiales ferromagnéticos) se cumple que la permeabilidad magnética es próxima a 1, no dependiendo de la frecuencia del campo magnético (Pérez, 2001).

Tabla II.1: Constantes dieléctricas relativas (ASTM D4748)

Material	Rango, $\epsilon_r$	Promedio, $\epsilon_r$
Hormigón	6-11	9
Hormigón compactado	5-7	6
Hormigón bituminoso	3-5	4
Grava	5-9	7
Arena	2-6	4
Roca	6-12	9

#### II.6.4 Velocidad de propagación y longitud de onda

Las ondas electromagnéticas viajan en un medio a una velocidad que depende de la constante dieléctrica relativa del material, de la velocidad de la luz en el vacío, y de la permeabilidad magnética relativa. La velocidad de la onda electromagnética ( $V_m$ ) en un cierto material viene dada por:

$$V_m = \frac{c}{\sqrt{(\epsilon_r \mu_r / 2)((1+P^2)+1)}} \quad (2.10)$$

Donde P es el factor de pérdida, de manera que  $P = \sigma / \omega \epsilon$  y  $\sigma$  es la conductividad,  $\omega = 2\pi f$  (f es la frecuencia), y  $\epsilon$  la constante dieléctrica absoluta. En un material con un bajo factor de pérdida tenemos  $P \rightarrow 0$ ; entonces la velocidad de la onda electromagnética es dada en unidades de m/ns:

$$V_m = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad (2.11)$$

Donde c se expresa de la siguiente forma:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (2.12)$$

Al sustituir el valor de  $\epsilon_0 \mu_0$  (permeabilidad magnética y permeabilidad dieléctrica en el vacío) en la ecuación 2.12 resulta un valor de  $c=0.30$  m/ns, velocidad de propagación de la onda en el espacio vacío (velocidad de la luz).

Finalmente, el tiempo doble de propagación T, puede ser determinado mediante representación gráfica de las señales del GPR. Por lo que con estas premisas, la profundidad de penetración (D) puede ser determinada a partir de la velocidad en el medio  $V_m$  (Tavera, M.; Pérez R. et al.; 2008):

$$D = \frac{TV_m}{2} \quad (2.13)$$

### II.6.5 Longitud de onda en un medio diferente del vacío

La longitud de onda en un medio dado,  $\lambda_m$ , dependerá de la velocidad de fase (e indirectamente de la constante dieléctrica efectiva del mismo) y de la frecuencia de onda emitida; su expresión es:

$$\lambda_m = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\omega} v = \frac{2\pi}{\omega} \frac{c}{Re\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} = \frac{\lambda_0}{Re\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \quad (2.14)$$

Donde  $\lambda_0$  es la longitud de onda en el vacío.

En medios no magnéticos ( $\mu_r=1$ ) y  $R_e$  coeficiente de reflexión, la expresión se simplifica, quedando como:

$$\lambda_m = \frac{\lambda_0}{R_e \sqrt{\epsilon_r}} \quad (2.15)$$

La longitud de onda determina la resolución vertical del georadar y dependerá de la frecuencia de emisión de la antena y de la constante dieléctrica efectiva del material.

### II.6.6 Factor de atenuación

La propagación de onda  $\gamma = \alpha + i\beta$ , depende de la constante de atenuación  $\alpha$  que es parte real y la constante de fase  $\beta$  que es parte imaginaria. Se llama factor de atenuación al parámetro que caracteriza el grado de disminución de la amplitud de onda, conforme aumenta la distancia al punto de emisión (antena), siendo sus unidades  $m^{-1}$  y su expresión matemática la siguiente:

$$\alpha = \frac{\omega}{c} \text{Im} \sqrt{\epsilon_r \mu_r} \quad (2.16)$$

$$\beta = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_r} \quad (2.17)$$

Donde  $\text{Im} = \text{Tan}(\delta_e)/2$ , tangente del ángulo de pérdidas eléctricas, parámetro permite obtener el grado de decaimiento de la amplitud de onda conforme esta se propaga por el medio material.

### II.6.7 Reflexión y Refracción

Cuando la energía electromagnética alcanza una discontinuidad en los parámetros electromagnéticos del medio, se producen los fenómenos de reflexión y de refracción ver figura II-4. Cuando la interfase es plana, la frecuencia de las ondas reflejadas y refractadas es la misma que la frecuencia de la onda incidente, siendo también el ángulo de reflexión igual al de incidencia.

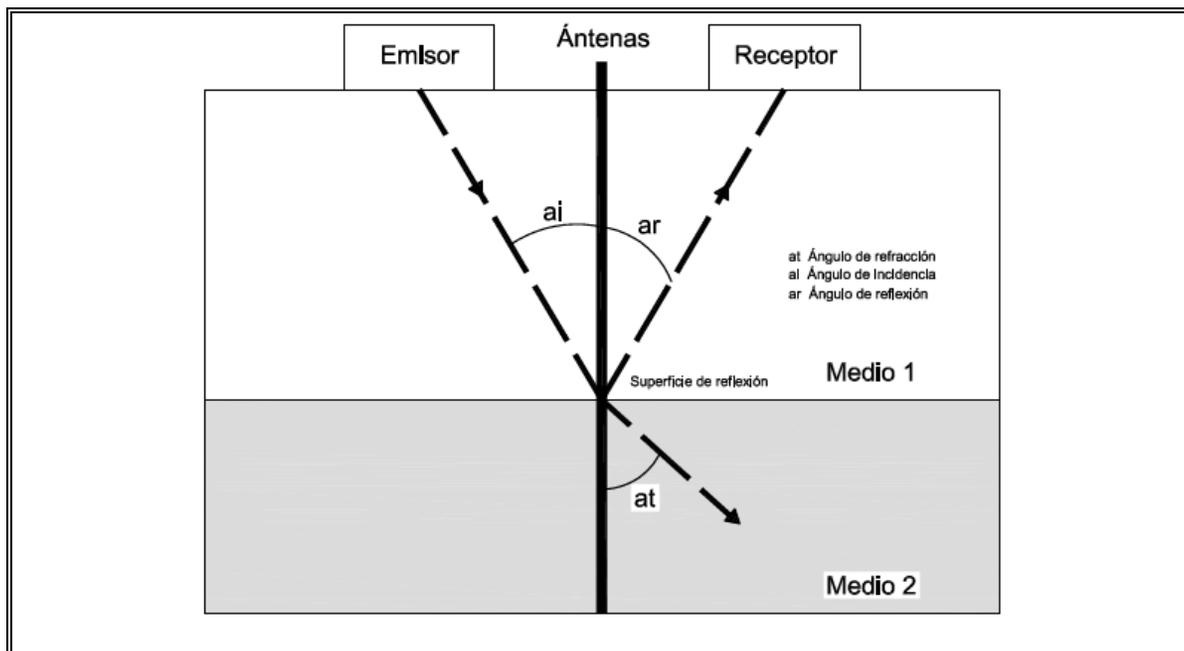


Figura II-4: Emisión y recepción de una onda electromagnética.

En los estudios que se realizan con georadar, la reflexión es de ángulo pequeño, es decir, que se trabaja con incidencia normal (en el caso de que la superficie reflectora sea plana). En estas condiciones, los coeficientes de reflexión y de refracción sólo dependen de la relación entre impedancias complejas. Si además se trabaja en medios no magnéticos, una aproximación adecuada para la mayoría de los estudios con georadar, la expresión de los coeficientes queda como:

$$R_e = \frac{\sqrt{\epsilon_{r1}} - \sqrt{\epsilon_{r2}}}{\sqrt{\epsilon_{r1}} + \sqrt{\epsilon_{r2}}} \quad (2.18)$$

Donde  $R_e$  (coeficiente de reflexión), porcentaje de energía reflejada respecto de la energía incidente.

De estas expresiones se puede deducir que, cuanto mayor sea la diferencia entre las constantes dieléctricas de los medios, mayor será el coeficiente de reflexión, es decir, a mayor contraste entre los dos medios en contacto, mayor porcentaje de la energía

incidente será reflejado en la discontinuidad y, por lo tanto, un menor porcentaje de energía será transmitido al medio inferior.

En un estudio con georadar, valores de  $R_e$  elevados implican que se va a observar con más facilidad la onda reflejada en los registros. Pero, a su vez, la penetración del método disminuye y las reflexiones producidas en contrastes posteriores son de menor amplitud, pues el porcentaje de energía refractada es menor.

También es consecuencia de la ecuación 2.17 que si  $\epsilon_{r2} > \epsilon_{r1}$  lo que sucede cuando se coloca un reflector metálico en la parte posterior de una muestra  $R_e < 0$ . Esto implica que la onda que se refleja cambia su polaridad. Si por el contrario  $\epsilon_{r2} < \epsilon_{r1}$ , lo que sucede cuando el segundo medio es aire  $R_e > 0$  y la onda se refleja sin cambiar la polaridad.

### II.6.8 Ecuación del GPR

La ecuación del georadar para equipos mono-estáticos (antena en función emisor-receptor), comúnmente presentada en las especificaciones técnicas del equipo está determinada por la relación (Q) entre la potencia recibida  $P_R$ , y la potencia emitida  $P_E$ . La ecuación 2.18, representa esta relación.

$$Q = \frac{P_R}{P_E} = \frac{\lambda^2}{4\pi} G^2 \frac{S}{(4\pi r^2)^2} e^{-4\alpha r} \quad (2.19)$$

donde  $\lambda$ : Longitud de onda en aire.

G: Ganancia de la antena.

S: Superficie efectiva del reflector.

$\alpha$ : Constante de atenuación.

r: Distancia al reflector.

De la ecuación 2.18, se puede obtener la relación entre amplitudes de onda ( $Q_{adm}$ ) recibida,  $A_R$ , y emitida  $A_E$  de la siguiente manera (Gottsche, 1997)

$$Q_{amp} = \frac{A_R}{A_E} \alpha \sqrt{\frac{1}{r^4} e^{-4\alpha r}} = \frac{e^{-2\alpha r}}{r^2} \quad (2.20)$$

## II.7. Procesamiento de información del GPR

El procesamiento de señales es un medio para reducir el ruido [Daniels, 2004].

Los autores [Pérez, 2001], [Gutierrez, 2004], [Daniels, 2004] y [Jol, 2008] señalaron que son muchos los factores que limitan el desempeño del Radar de Penetración Terrestre, como la atenuación de las ondas irradiadas, ruidos instrumentales, ruidos externos, entre otros. Por esto, antes de cualquier tipo de interpretación es necesario realizar un procesamiento de datos, de acuerdo a los objetivos de la prospección, con el objeto de mejorar la imagen, resaltar algún evento, aumentar la resolución y la relación ruido-síñal.

Aunque los equipos de radar cuentan con filtros en la unidad de control donde en algunas ocasiones es posible realizar las interpretaciones directamente en campo ello es poco frecuente y por lo general es necesario procesar los datos en función de parámetros como, las características de la unidad GPR, el entorno geológico y los objetos a estudiar.

Los registros guardados en el dispositivo de almacenamiento conocidos como Radargramas son una representación gráfica de las trazas generadas cada vez que se produce un pulso electromagnético a lo largo de un perfil. En el eje horizontal se representan distancias

v/s tiempo transcurrido desde la generación del pulso.

El procesamiento de datos parte desde el instante que se dispone de los Radargramas. Se debe mencionar que dicho procesamiento debe ser empleado con especial cuidado, ya que, aunque puedan contribuir a mejorar el registro, una incorrecta o excesiva aplicación puede conllevar a la pérdida de información importante o llevar a interpretación y conclusiones

incorrectas. A continuación se presentan algunos de los más relevantes procedimientos aplicados para este fin.

### **II.7.1 Filtros**

El término filtrado, hace referencia a una variedad amplia de técnicas cuyo objetivo es modificar selectivamente la amplitud o la frecuencia de las señales recibidas. Este tipo de procedimiento podría clasificarse en dos grupos: filtros horizontales y verticales.

#### **II.7.1.1 Filtros horizontales (Espaciales)**

Este tipo de tratamiento de datos consiste básicamente en que unos filtros pueden ser pasa alta, pasa bajas o pasa banda, aplicados horizontalmente sobre el registro. Permiten el paso de las componentes frecuenciales de las señales que se sitúan entre unos valores dados.

Los filtros pasa bajas disminuyen los efectos de ruido de fondo que se observan en pocas trazas consecutivas. Los filtros pasa altas disminuyen los efectos de líneas continuas que se observan en los registros durante un número elevado de trazas.

El objetivo de este filtro es eliminar el fondo de ruido de las señales. Puede tratarse tanto de ruido de alta frecuencia ocasionado por una superficie irregular sobre la que se desplaza la antena, o bien puede tratarse de ruido de baja frecuencia debido a un reflector externo, como puede ser la persona que maneja la antena. El tratamiento del filtro horizontal es eliminar las mencionadas señales registradas como ruido, superpuestas a las que provienen de anomalías de interés, dejando únicamente aquellas señales que presentan las frecuencias horizontales seleccionadas. El resultado de aplicar este tipo de filtros es la eliminación de lo que serían un fondo del registro.

Este tipo de tratamiento de datos puede realizarse con dos tipos de filtros: los denominados Filtros de Respuesta Finita (FIR) y los denominados Filtros de Respuesta Infinita (IIR).

Un Filtro de Respuesta Finita se caracteriza por ser un sistema lineal discreto e invariante en el tiempo que presentan una respuesta a la señal de un pulso que tiene una longitud finita. Este tipo de señal funciona convolucionando la señal del radar con una función de longitud finita. Este tipo de filtro consiste en un promedio de una cierta región del registro, donde podemos tener filtros cuadrados o triangulares, dependiendo de la forma de las ventanas utilizadas. La salida del filtro es un valor promedio como único punto, asociado al centro de la región seleccionada. Los filtros de respuesta finita, eliminan ruidos de fondo en el caso de pasa alta y realizan una especie de suma de las señales en el caso de paso baja.

Los Filtros de Respuesta Infinita corresponden a los filtros analógicos como la deconvolución predictiva, comunes en el tratamiento de señales, donde el operador es igual al producto de una función impulso de respuesta infinita por una función de los datos. El resultado es una función que decae exponencialmente hasta el valor cero. Son filtros que se denominan predictivos o recursivos porque el resultado de filtrar un cierto evento depende de los datos pasados anteriores a este, es decir, de la historia.

#### II.7.1.1 Filtros verticales (Temporales)

Este tipo de tratamiento consiste en unos filtros que pueden ser pasa alta, pasa baja o pasa banda que se aplica verticalmente sobre el registro, sobre cada una de las trazas adquiridas. Se trata de un filtrado frecuencial aplicado sobre cada una de las trazas que componen el Radargrama.

El objetivo es disminuir el ruido de fondo para mejorar la relación señal-ruido y destacar la información correspondiente a las anomalías que se pretenden investigar.

El filtro puede ser pasa altas, pasa bajas o pasa banda, dependiendo de las frecuencias de corte introducidas. Estas frecuencias se pueden determinar conociendo las frecuencias de los datos y de los eventos que se desean filtrar.

Este tipo de tratamiento de datos puede realizarse con dos tipos de filtro: los denominados Filtros de Respuesta Finita (FIR) y los denominados Filtros de Respuesta Infinita (IIR).

Con los Filtros de Respuesta Finita verticales, en caso de paso alta, se eliminan las bajas frecuencias de cada traza, mientras que en el caso de pasa baja se eliminan las altas frecuencias. El promedio de una muestra alrededor de un punto central, a lo largo de toda la traza, constituye un ejemplo de filtro pasa baja. El resultado del promedio es un valor que se asocia en el tiempo con el punto central de la muestra.

Los Filtros de Respuesta Infinita verticales, multiplican la señal por un operador que tiene amplitud máxima igual a 1 para la banda de frecuencias que corresponde a la señal que desea analizar, siendo una función que decae, a partir de esta banda, hacia un valor cero. Estos son filtros recursivos que se corresponden con los conocidos filtros análogos.

Para seleccionar la frecuencia o las frecuencias de corte, es necesario obtener el espectro frecuencial de varias trazas del registro. Para ello se realiza una transformada de Fourier y se representan los espectros de amplitud de las trazas. Se seleccionan las frecuencias que pertenecen a la señal y se analizan los contenidos frecuenciales que se desean filtrar porque introducen ruido en el registro. Las frecuencias de corte seleccionadas deben incluir entre ellas toda la banda de frecuencias que no se desean eliminar.

Aplicando dos filtros frecuenciales verticales, un paso alto y otro paso bajas, a un mismo registro, se obtiene un efecto de filtro pasa banda, disminuyendo las

componentes frecuenciales que se encuentran fuera del intervalo comprendido entre los dos tiempos de corte seleccionado.

### **II.7.2 Deconvolución predictiva**

La deconvolución es una técnica de procesado muy utilizada en los estudios sísmicos. Su objetivo es separar los efectos que forman la onda para eliminar los debidos al medio en el pulso inicial, convirtiendo el registro obtenido en el campo en un radargrama donde las señales registradas representan únicamente la reflexión primaria, de tal manera que las trazas no presentan los efectos debidos a la propagación del pulso por el medio.

El resultado es un registro donde la forma de los pulsos ha sido modificada, se utiliza para transformar una onda en un pulso único que representa la forma de la onda tras sufrir una reflexión primaria antes de que el medio filtre durante su propagación. Durante este procesado, lo que hace la deconvolución a la respuesta del terreno y a la onda emitida, es descomprimir las componentes de esta, eliminando las reflexiones múltiples, y dejando únicamente las reflexiones primarias producidas en las discontinuidades.

Cuando se ha diseñado el filtro se procede a la Deconvolución predictiva de la señal. El proceso consiste, dada la traza, en un determinado tiempo  $t$ , que predice el valor de la misma en un tiempo  $t + a$ , siendo  $a$  el denominado intervalo de predicción, donde el parámetro  $a$  debe ser igual o similar a intervalo temporal entre las múltiples que determina la longitud deseada del pulso de salida del filtro.

Este tratamiento se aplica para una determinada longitud de tiempo de predicción  $l$ , que es el tiempo doble de propagación de la reflexión primaria, es decir, el tiempo que ha tardado la señal en alcanzar el reflector que provoca las múltiples y regresa hasta la antena receptora que indica así mismo la longitud del filtro utilizado.

La selección de estos dos parámetros,  $a$  y  $l$ , debe realizarse cuidadosamente ya que normalmente se desconoce la forma del pulso no convolucionado. Hay que considerar también que al desconocimiento frecuente de la forma original del pulso transmitido se añade que la señal registrada normalmente contiene ruido que no puede despreciarse, sobre todo, en el caso de medios complicados.

Para elaborar el filtro se parte del supuesto de que es posible despreciar el ruido. Estos dos problemas pueden ocasionar que un registro tratado con deconvolución haya sido modificado de forma que se podría decir irreal.

En casos sencillos los parámetros  $a$  y  $l$  son relativamente simples de determinar, y el proceso de deconvolución mejora los radargramas originales, simplifica algunos registros y permite una interpretación más sencilla.

### **II.7.3 Migración**

Este procedimiento se realiza para trasladar a su posición real los efectos de la inclinación de las reflexiones registradas y colapsar las difracciones que producen. Para utilizar este tratamiento se necesita estimar la velocidad promedio de propagación por el medio, pero puede conocerse a partir de las hipérbolas generadas en las difracciones. Consiste básicamente en el cálculo de la ecuación de cada una de las hipérbolas, desplazando el reflector al vértice de la hipérbola. Como la ecuación de la hipérbola depende de la velocidad de propagación del medio, un error en la determinación de este parámetro puede ocasionar que no llegue a colapsar totalmente dicha hipérbola (velocidad estimada inferior a la real) o bien que se produzca el efecto conocido como sobremigrado (la velocidad estimada es superior a la real).

### **II.7.3 Transformada Rápida de Fourier (TRF)**

Se utiliza para pasar los registros del dominio temporal al frecuencial, lo que permite analizar las distintas contribuciones frecuenciales que componen la registrada.

Para una función real temporal  $f(t)$  que cumpla las condiciones de Dirichlet, su transformada de Fourier se define como:

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt} dt \quad (2.21)$$

La transformada inversa devuelve la señal temporal a partir de su transformada de Fourier se define como:

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(w)e^{-iwt} dw \quad (2.22)$$

Este tratamiento de datos, conocido ampliamente, consiste en la realización de un análisis frecuencial de los registros, lo que permite el estudio de la evolución de los parámetros de la señal en función de la frecuencia. A menudo se utiliza para obtener los espectros de frecuencia de las trazas, con el fin de seleccionar mejor los filtros frecuenciales que se pueden aplicar, o para comprobar los efectos que sobre las frecuencias ha tenido la aplicación de alguno de los mencionados filtros.

#### II.7.4 Transformada de Hilbert

La transformada de Hilbert es el procedimiento matemático que expresa la relación existente entre la parte real y la parte imaginaria de una función causa, o bien entre la fase y la amplitud de la misma. Mediante esta transformada se puede reconstruir la parte imaginaria, conociendo la parte real o viceversa, o reconstruir la amplitud de una señal a partir de su fase conocida o viceversa.

Las siguientes expresiones definen la transformada de Hilbert:

$$R(w) = X(w) \otimes \frac{1}{\pi w} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X(y)}{w-y} dy \quad (2.23)$$

$$X(w) = -R(w) \otimes \frac{1}{\pi w} = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(y)}{w-y} dy \quad (2.24)$$

Donde el operador  $\otimes$  representa la convolución de dos funciones.

A partir de las expresiones 2.22 y 2.23 se pueden obtener la parte real de la función a partir de su parte imaginaria, y viceversa.

Este procedimiento matemático expresa la relación entre la parte real y la parte imaginaria de las señales, con el que pueden obtenerse envolventes de las amplitudes

en los registros, la fase y la frecuencia instantáneas. Estas últimas pueden utilizarse como indicadores del tipo de filtrado que sufre la señal durante su propagación por el medio, proporcionando información del comportamiento del medio frente a la señal electromagnética aplicada. La obtención de la envolvente de una traza proporciona información acerca de la amplitud instantánea de la señal y, por tanto, acerca de la energía implicada en cada evento.

## **II.7.5 Procedimiento de corrección de señal**

### **II.7.5.1 Remoción de fondo**

En los radargramas de datos en bruto suelen aparecer bandas horizontales de alta intensidad que ocultan parcial o totalmente las señales de interés, por lo que ellas deben ser eliminadas. Estas señales de fondo pueden deberse, por ejemplo, a la recepción directa de las señales provenientes del emisor, lo cual ocurre especialmente cuando la unidad de GPR utiliza antenas no apantalladas, a la reflexión de las señales emitidas en la interfase entre el aire y el suelo, a las reflexiones producidas en objetos extraños al subsuelo, tales como el operador, a reverberaciones de origen diverso, etcétera.

Una técnica sencilla para eliminar estas bandas horizontales consiste en obtener una traza promedio, calculada a partir de todas las trazas que componen el radargrama, la cual luego es restada a cada una de ellas. Como alternativa para calcular la traza promedio a veces se considera sólo una selección de trazas. Es importante notar que la eliminación del fondo a partir de la resta de una traza promedio tiende a eliminar no sólo las señales horizontales indeseadas sino también las reflexiones que pudieran producirse en estratos horizontales o casi-horizontales, lo que podría constituir una pérdida de información relevante. Es en parte por ello que el método a veces sólo se aplica en un área o ventana del radargrama.

### **II.7.5.2 Correcciones estáticas**

Las correcciones estáticas son un tipo de procesado que tiene como objetivo corregir los efectos producidos en los registros por la topografía de la superficie en la que se

han trazado los perfiles y también los efectos ocasionados por variaciones bruscas de la velocidad de propagación de la onda en el medio.

Estas correcciones consisten en determinar los desplazamientos temporales de los eventos registrados respecto de los que se registran si el perfil se hubiese trazado sobre una superficie totalmente plana y en el medio la permitividad dieléctrica fuese constante hasta el elemento reflector.

### II.7.5.3 Ganancia

Se trata de la amplificación que se introduce a la señal. Esta amplificación no tiene que ser constante durante toda la longitud de la traza, pudiendo variar con el tiempo de propagación.

Tiene por objeto amplificar eventos asociados con reflexiones profundas o poco energéticas, aumentando las amplitudes que, por su pequeño tamaño, no serían tenidas en cuenta durante la interpretación de los registros. Se utiliza para corregir los efectos de la disminución de energía producidos durante la propagación de la señal por el medio. La ganancia de un equipo de GPR es definida por la siguiente expresión:

$$G = eD = \frac{4\pi}{\lambda^2} A_{eff} \quad (2.25)$$

Donde:

D: directividad y  $A_{eff}$ : Abertura efectiva de la antena.

Para seleccionar la ganancia a aplicar se puede comparar la amplitud de la señal para diferentes tiempos de propagación y así obtener el grado de atenuación que sufre su propagación. Este tipo de tratamiento puede aplicarse durante la adquisición de datos de campo como durante el procesamiento de datos para la interpretación.

### II.7.5.3 Superposición de trazas.

Tiene por objetivo la mejora en la relación señal–ruido de los registros. En el caso de

antenas monoestáticas, el procedimiento consiste en la suma aritmética de trazas consecutivas. El resultado enfatiza los eventos coherentes y disminuye la amplitud del ruido, mejorando la relación señal–ruido. Se debe tener en cuenta que este procedimiento empeora la resolución horizontal del estudio.

### **III. PROCESAMIENTO DE DATOS GEORADAR: LOSETAS DE HORMIGON Y BLOQUES DE MAMPOSTERIA.**

#### **III.1 Descripción del procedimiento desarrollado**

En este capítulo se desarrolla un procedimiento para obtener una imagen 2D de un perfil o corte vertical de cada probeta de ensayo de losetas de hormigón de características distintas, a partir de los datos adquiridos sobre la superficie de cada una de ellas. El desarrollo del procedimiento de procesado aquí presentado se realiza utilizando el software ReflexW de Sandmeier.

ReflexW, realizado por Sandmeier Scientific Software (Alemania), para sistema operativo Windows de Microsoft. Se trata de una completa herramienta de procesado. Este programa admite datos en los formatos propios de las marca comerciales de GPR, así como SEG-2, SEG-Y o formatos ASCII, para integrar datos no estándar, e incluso importa imágenes de radargramas. Esta estructurados en módulos, para su adquisición en función de los diferentes requisitos de procesado. El modulo básico, conocido como análisis de datos 2D (2D analysis module), cuenta con amplia capacidad de procesamiento, como filtros 1D y 2D, deconvolucion, estrategias de interpolación de trazas, ganancias, análisis espectral y migración, corrección topográfica, análisis de la velocidad por adaptación de hipérbolas, etc. Además de procesar paso a paso, admite la generación de secuencias de procesado, para automatizar el proceso en perfiles con características comunes. El módulo de análisis de velocidad permite realizar un estudio de la distribución 1D de la velocidad, sobre un conjunto de medidas, mediante diferentes técnicas de análisis.

### III.2 Obtención de datos mediante realización de ensayo no destructivo

Se procedió a realizar los ensayos no destructivos mediante la técnica del GPR, a través del uso del equipo de medición MALA CX, el cual posee una pantalla de visualización previa de las mediciones, cuenta con su antena de 2.3 GHz de alta frecuencia que posee en el mismo componente el emisor y receptor de la señal de la onda electromagnética, montada sobre ejes de pares de rueda que permiten la movilización de la antena sobre la superficie analizada y adicionalmente se dispone de una cuadrícula guía a ser colocada sobre la superficie para la toma de mediciones, tal como se ilustra en la imagen del equipo mostrada en la figura III-1.



Figura III-1: Imagen de componentes que conforman el equipo MALA CX.

El procedimiento de medición consiste en desplazar la antena móvil sobre la cuadrícula guía que se encuentra espaciada en ambas direcciones a cada 0.10m, y cada dirección tiene una dimensión total de 0.80m, ver figura III-2 de ilustración de cuadrícula guía, utilizada en todas las mediciones realizadas en losetas de hormigón de dimensiones de 1.0m x 1.0m x 0.10m. La antena, que debe estar centrada respecto a la línea guía y mantener dicha ubicación durante el desplazamiento de la antena en la toma de la medición, durante el movimiento de la antena va emitiendo y recibiendo pulsos a cada 0.005m.

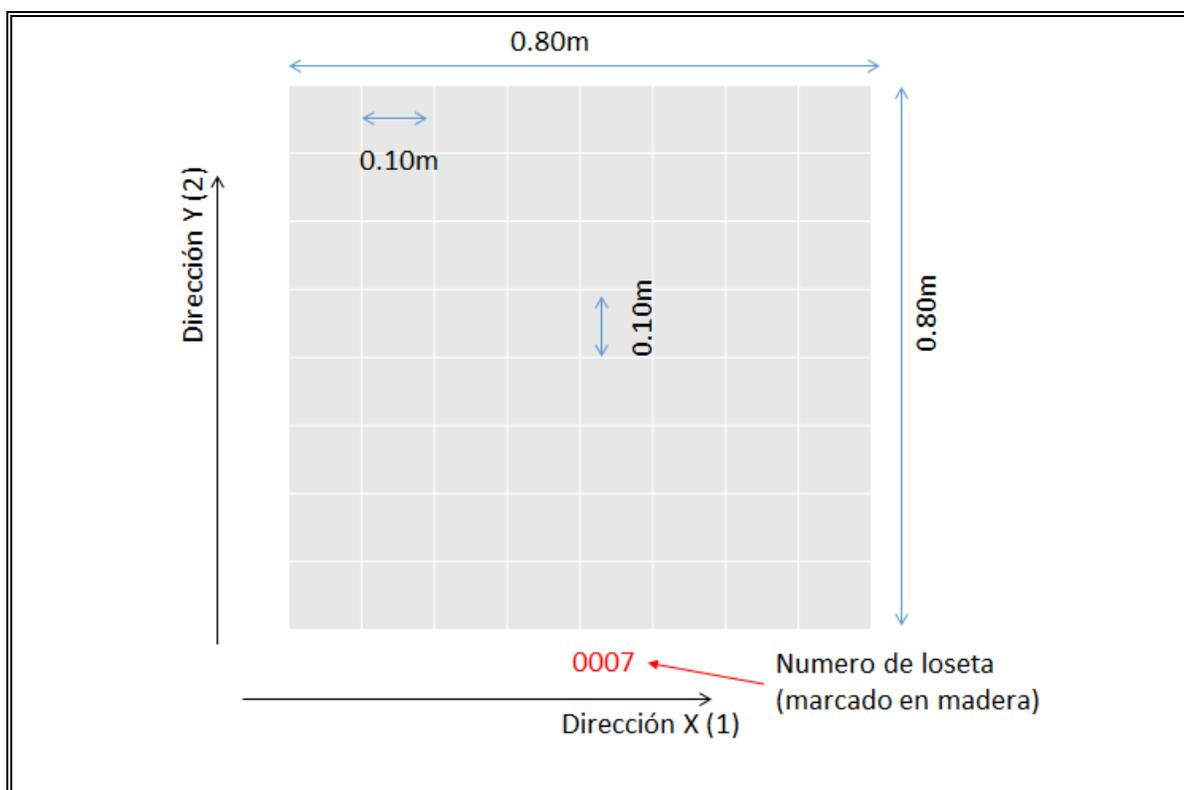


Figura III-2: Ilustración de cuadrícula guía para toma de lecturas de GPR.

Por cada medición obtenida de las líneas guía se obtienen 161 trazas que están equidistantes a cada 0.10m, por lo que en cada dirección se realizan 9 lecturas, resultando un total de trazas registradas de 1449 para la dirección X e Y.

A continuación en la figura III-3, se muestra una imagen de toma de lectura en una de las direcciones de la loseta. La velocidad con la que se desplaza la antena no influye en la toma de las trazas de los pulsos emitidos, pero es recomendable que el usuario del equipo muestre destreza en la toma de datos al tratar de mantener firme y centrada la antena durante el desplazamiento sobre la línea guía de la cuadrícula.



Figura III-3: Imagen de desplazamiento de la antena y toma de lecturas.

La distancia entre ejes de ruedas de la antena es de 0.04m y adicionalmente es la separación entre el transmisor Tx y el receptor Rx que componen la antena en su proceso de emisión y recepción de pulsos electromagnéticos cuyas trazas se encuentran en el dominio del tiempo.

### **III.3 Procesado típico de datos de georadar**

La primera parte del procesado consiste en la preparación de los datos y su importación en el programa de procesado. Esto supone el establecimiento de la correspondencia entre las trazas y las coordenadas con las que fueron obtenidos, y entre los ficheros y los perfiles a los que corresponden, proporcionando así a las trazas la información de la geometría del sondeo realizado. Esta fase se conoce como de definición de la geometría. Implica la pre visualización de los datos y su comparación con las notas de campo, para observar la ubicación de los datos erróneos, para localizar trazas correspondientes a problemas de medición en campo, etc.

La edición de trazas incluye la interpolación o anulación de las trazas ruidosas, la eliminación de las trazas previas al comienzo de la línea y las posteriores a su finalización, la corrección de la polaridad de las trazas en aquellas que la tengan invertida etc.

Al definir un proyecto en ReflexW, este programa crea una serie de directorios para cada una de las etapas de procesamiento, donde almacena cada uno de los archivos procesados. El directorio ASCII está destinado a los archivos de datos originales, por lo que es recomendable colocar en él una copia de los ficheros con los datos de campo en algún formato que ReflexW sea capaz de importar (e.g., .sg2, rd.6, rd.3, etc). Al ejecutar la función import del programa convierte estos ficheros de formato conocido en un fichero con extensión .dat y formato propio de ReflexW, que queda guardado en el directorio de ROHDATA, destinado a los datos de origen puestos en formato ReflexW. Automáticamente, a cada paso de procesado se genera un nuevo fichero con el perfil obtenido como resultado, y se almacena en el directorio PROCDATA. De esta manera se respeta el fichero anterior, generándose una sucesión de ficheros que puede ser consultada, tanto para su comparación, como para realizar la vuelta hacia atrás en el procesado, si fuera necesario.

El nombre de fichero elegido en la importación se transfiere a todos los posteriormente creados en el procesado. De manera automática, la extensión de los ficheros almacenados en el directorio PROCDATA se forma por dos caracteres numéricos (processing label) y la letra T (e.g., nombre.01T, nombre.02T, etc).

A continuación en la tabla III-1 se describen las características de las cuales están compuestas las losetas ensayadas con el GPR, para la determinación de su radargrama e imagen procesada según la descripción de pasos mostrados en este capítulo. Todas las losetas de hormigón son de igual dimensión y geometría cuadrada, de 1.0m de ancho x 1.0m de largo x 0.10m de espesor, excepto la loseta 12, que contiene en su interior dos bloques de hormigón, por lo que se construyó de espesor es de 17cm

Tabla III-1: Listado de losetas ensayadas con GPR y descripción.

Loseta	Descripción del contenido en su interior de la loseta.	Etiqueta de fichero
1	Una barra de acero de $\phi=10$ mm de 40 cm de largo, al centro de la loseta	0007
2	Dos barras de acero de $\phi=10$ mm de 20 cm de largo topándose, al centro de la loseta	0008
3	Dos barras de acero una de $\phi=8$ mm otra de $\phi=4$ mm de 40 cm de largo y 20 mm de separación, al centro de la loseta	0005
4	Dos barras de acero de $\phi=10$ mm de 40 cm de largo y 6 cm de traslape, al centro de la loseta	0006
5	Listón de madera de 40 cm de largo y 20x20 mm, al centro de la loseta	0004
6	2 pelotas de pinpón a dos cm de distancia horizontal, al centro	0015

7	Rellena con cuadrado de poliestireno exp o goma de 200x200x5 mm, al centro de la loseta	0012
8	Rellena con 2 capas de hormigones distintos (diferentes propiedades mecánicas y vaciados con días de diferencia)	0009
9	Rellena con 2 capas de hormigón similar pero vaciadas con días de diferencia (simulación grieta)	0011
10	Con dos cortes en la cara posterior para simular agrietamiento	0013
11	Con tubos de PVC $\phi=20$ mm y $\phi=25$ mm de 20 cm de largo y unidos por una copla, al centro de la loseta	0014
12	Con ladrillos recubierta por 3 cm de hormigón, con papel para evitar que el mortero penetre en los orificios de los ladrillos. Loseta alta 17 cm	0017

La importación de los datos se realiza mediante el comando Modules → 2D Data analysis → File → Import, en la figura III-4 se muestra el panel de opciones de importación y un ejemplo del mismo introducir y modificar ciertas opciones y valores que corresponden a los datos medidos en las losetas de hormigón.

En fileheader-coordinates (superior izquierda), se elige el metro como unidad de longitud y el tipo de registro datos (3D-const offset), el sistema de coordenadas en este caso por ser mediciones realizadas a un objeto cuyas dimensiones coinciden con la cuadrícula guía se establece el origen en cero de cada una de las componentes.

Se activa control format y read coordinates para la lectura de las coordenadas medidas por el equipo. Se especifica original name para que todos los archivos que se generan en el procesamiento mantengan el mismo nombre original.

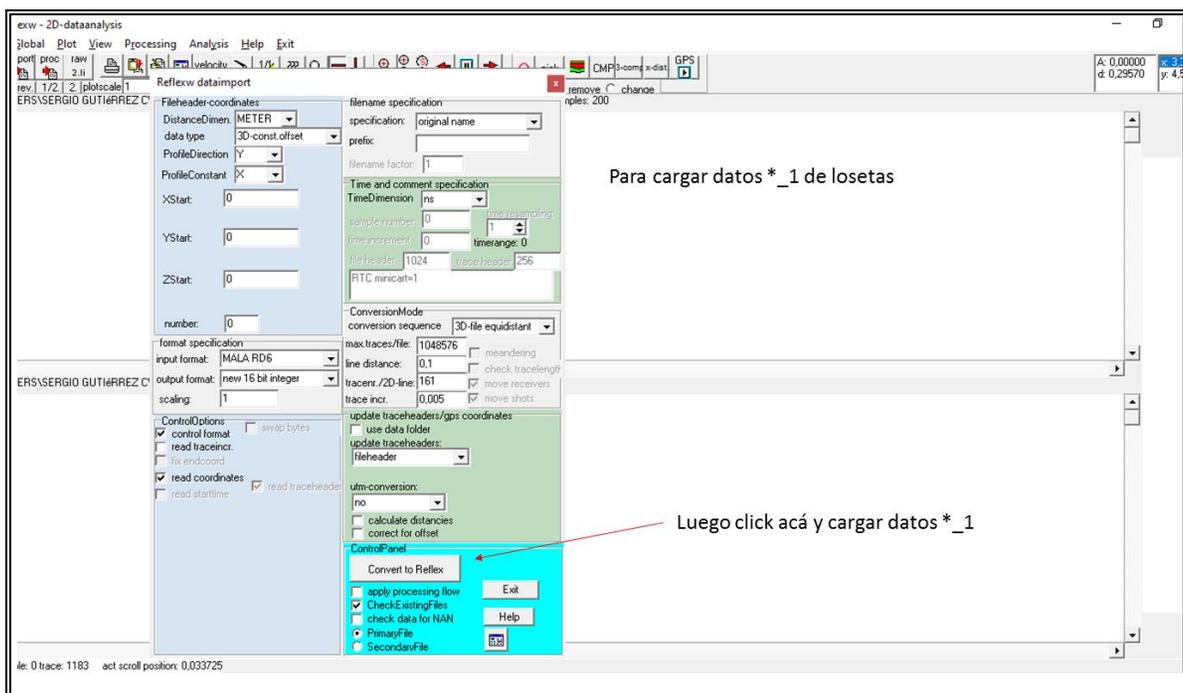


Figura III-4: Panel de opciones de importación en ReflexW.

En el menú de modo de conversión, se define 3D file equidistant y en la parte de máximas trazas se deja el valor por defecto y se procede a definir los datos que se saben de la obtención de las trazas las cuales están espaciadas en líneas de medición a cada 0.10m, y en cada línea se miden 161 trazas en 2D y el incremento en la distancia corresponde a cada 0.005m. Finalmente se define en la actualización del encabezado fileheader, y se procede a cargar los datos.

Al tener realizada la importación de los datos, los encabezados de trazas (traceheaders) pueden ser revisados en formatos de tablas mediante el uso del menú Edit Traceheader, y de esa manera revisar si no poseen algún tipo de anomalía, la cual puede ser editada mediante la generación de archivos ASCII tal como se ilustra en la figura III-5.

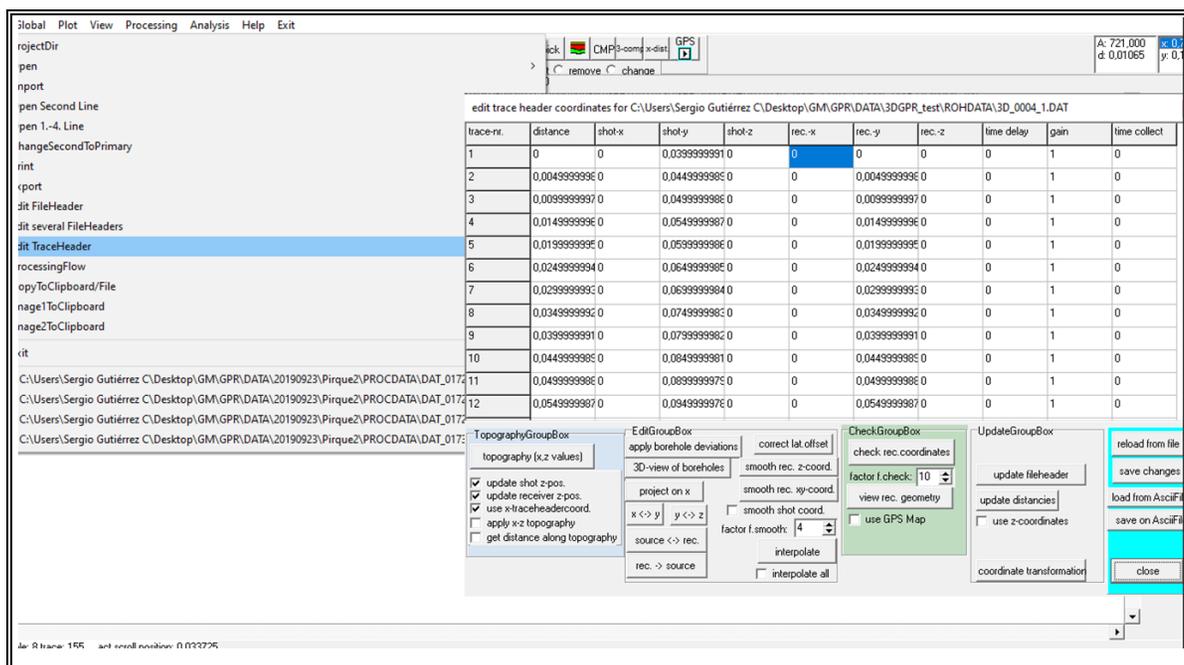


Figura III-5: Edición de datos importados en ReflexW.

En las mediciones obtenidas, se detectó incongruencia en el orden de los datos medidos en cada una de las direcciones ortogonales de lectura, por lo que se procedió a aplicar un método de ordenamiento, basado en la transposición de datos, por lo que fueron reordenados modificando las tablas, ASCII. Una vez finalizada la etapa de revisión y corroboración de información importada este correcta y congruente con las mediciones se dispone a realizar la visualización de las líneas, es decir la visualización del conjunto de trazas pertenecientes a cada línea medida mediante la opción Trace Interpolation/Resorting, donde se activa la función de resort-traceheader. De esta manera el programa ReflexW compatibiliza las coordenadas de las trazas con aquellas utilizadas por el programa mediante la generación de archivos de extensión .001T los cuales se generan en la carpeta PROCDATA, para cada una de las direcciones de medición en que se obtuvieron las trazas.

Con dichos archivos generados en el formato de trabajo de ReflexW, se procede a realizar una exportación mediante la función export y data export según se ilustra en la figura III-6 de exportación de datos procesados y compatibilizados. Se escoge la opción de extensión de archivo .RD3 para los archivos a ser exportados provenientes de la selección de archivos de extensión .00#T que corresponden a los archivos compatibilizados y almacenados en PROCDATA.

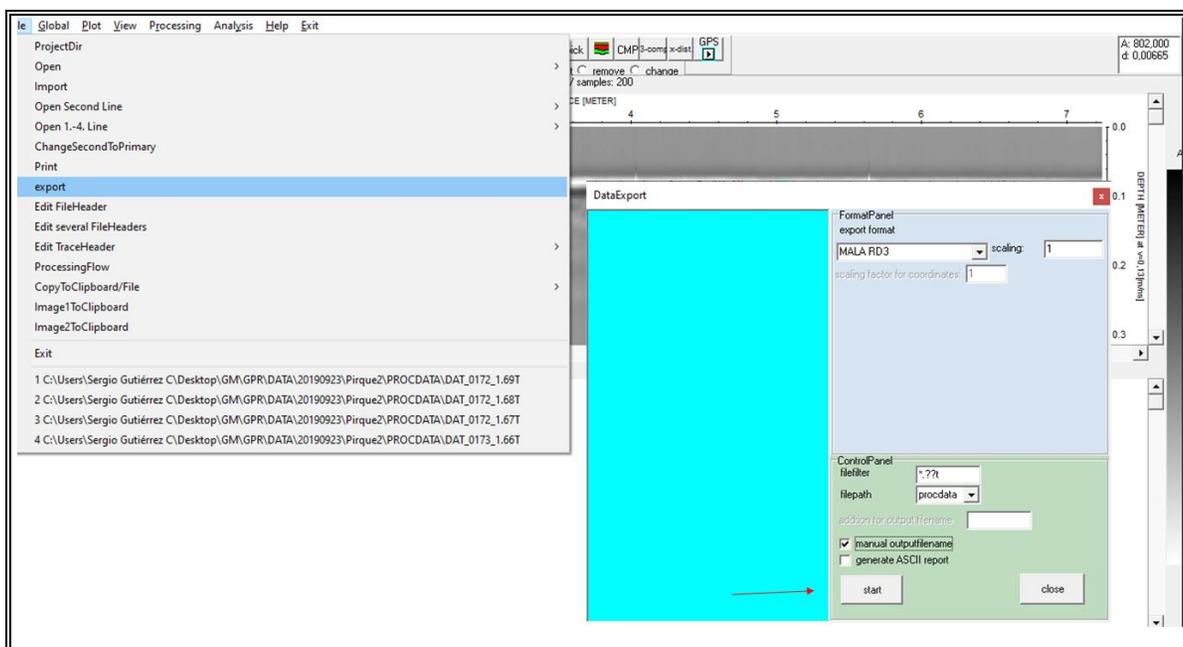


Figura III-6: Exportación de datos procesados ordenados y compatibilizados.

Teniendo generados los archivos de extensión .RD3, se puede hacer uso de la herramienta que posee ReflexW, denominada Reflex3DScan, la cual permitirá desarrollar un pre procesamiento de filtros previos para la generación de la imagen de las mediciones realizadas con el GPR.

A continuación se define que trabaje archivos de extensión .RD3 y que la adquisición sea tanto para la dirección X como para la dirección Y, por lo que previo a ello ambas direcciones tienen haber sido debidamente procesadas según lo descrito arriba referente al proceso de compatibilización y ordenamiento de formatos acorde a lo requerido por ReflexW.

Se definen el número de trazas para cada dirección y el número de líneas medidas o escaneadas que para el caso de las losetas de hormigón se sabe que son 161 trazas en ambas direcciones y que se requieren 9 mediciones para cada dirección, se establece la velocidad de propagación de la onda electromagnética en el medio analizado como 0.118 m/ns y la frecuencia de medición que posee la antena del equipo del GPR que corresponde a un valor de 2300MHz, tal como se ilustra en la figura III-7.

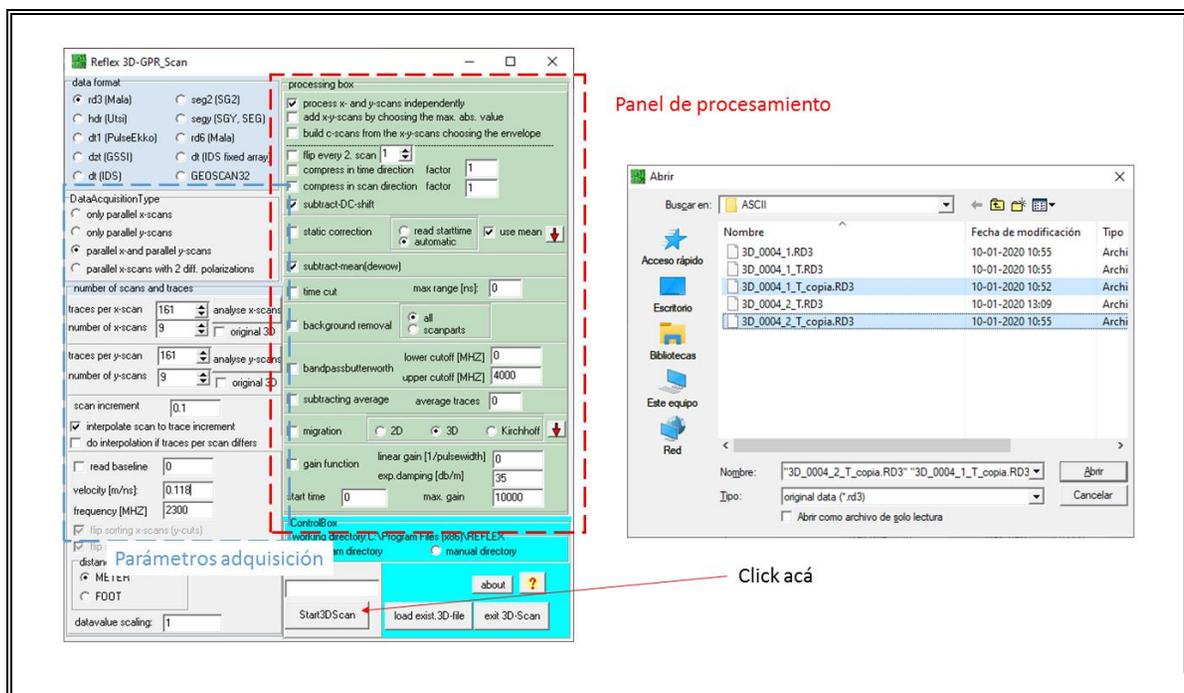


Figura III-7: Definición de parámetros de procesamiento y filtrado en Reflex3DScan.

### **III.4 Obtención de imágenes en losetas e interpretación de resultados**

En relación al panel de procesamiento disponible en Reflex3DScan, existen las opciones básicas de procesamiento en cada dirección en que se efectuó el ensayo de medición, la aplicación de correcciones en tiempo cero del desplazamiento y la eliminación del ruido de fondo correspondientes a *subtract DC-shift*, *subtract mean (dewon)* y *background removal*, respectivamente como procesamiento no tan refinado se puede realizar la corrida para la generación de una primer imagen de resultado del ensayo del GPR. Si dicho resultado no es satisfactorio en la calidad y definición de la imagen se puede mejorar aplicando los filtros descritos en el capítulo II del presente documento. Se pueden definir en Reflex3DScan filtros tales como: *Migration* y *Gain Function* en base una velocidad optima de viaje de la onda electromagnética en el medio; importante mencionar que el filtro de migración no ha sido aplicado a los resultados mostrados en el presente documento a diferencia del filtro de ganancia el cual se aplicó para la loseta que posee en su interior dos bolas de pin pon. A continuación en la figura III-8 se muestran las imágenes de radar obtenidas para la loseta 1 y 2.

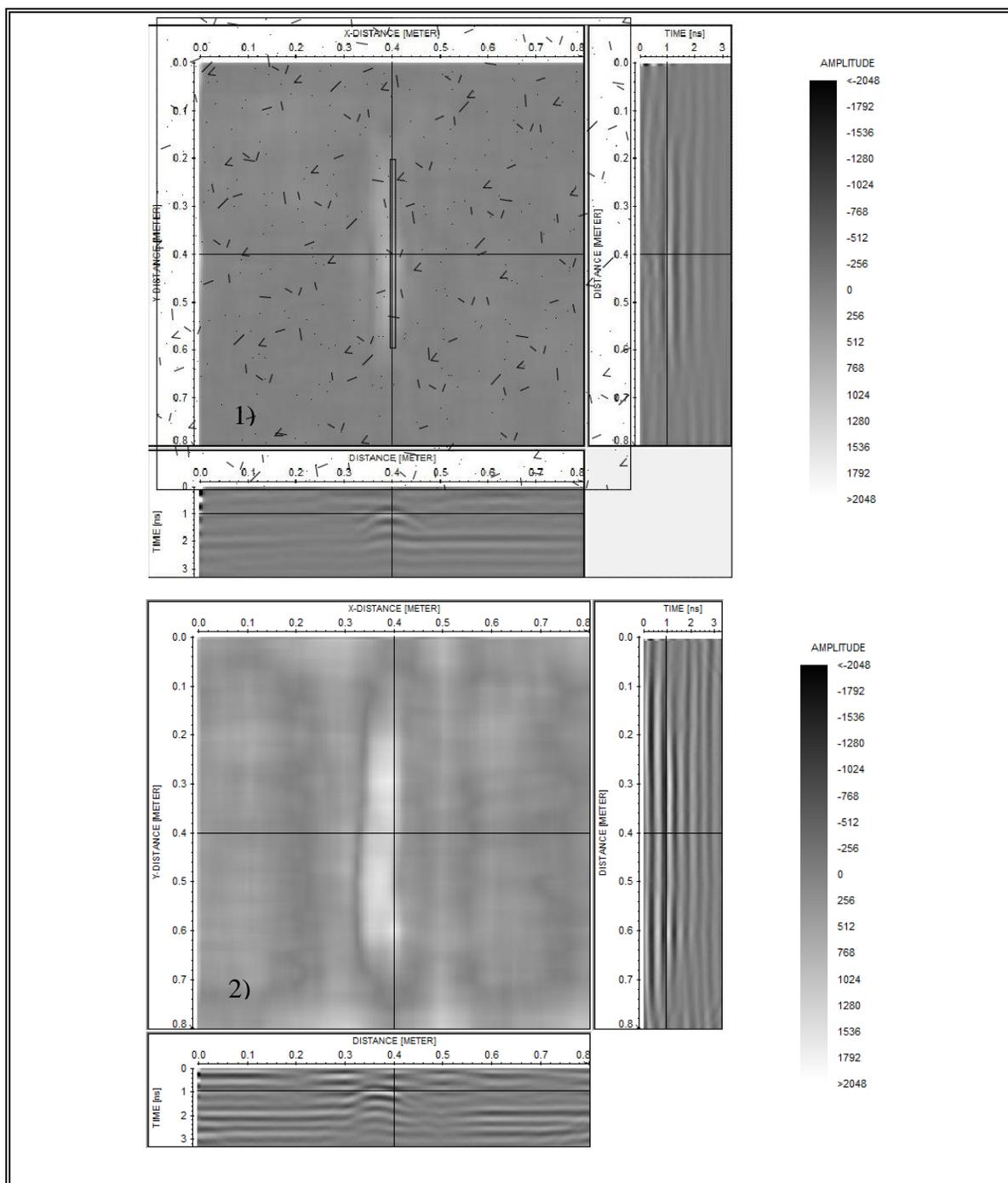


Figura III-8: 1) Loseta con una barra de 10mm de diámetro de 40cm 2) Loseta con dos barras de 10mm de diámetro topándose al centro de la losa de 20cm cada una.

En la imagen que representa el corte horizontal paralelo a la planta de la loseta 1, presentada en la figura III-8a, se ha realizado una superposición del dibujo a escala de la ubicación de la barra de 10mm de diámetro y 40 cm de longitud colocada al centro de la loseta. Al realizar la comparación con el resultado de la imagen del radar muestra la alteración de la propagación de la onda en la zona en donde se ubica la barra: ella se muestra en una tonalidad de gris más clara en la vista en planta de la loseta según la escala de intensidad del color gris mostrada en el costado derecho de la imagen que corresponde al registro de la difracción de la onda generada por el objeto de mayor constante dieléctrica al del material de la loseta. La loseta 2 muestra el mismo fenómeno para la existencia de dos barras de 10mm de diámetro y de 20cm de longitud cada una, topándose al centro de la loseta, sumando las dos una longitud total de 40cm.

Adicional a la imagen en planta que genera el programa Reflex3DScan, se puede también obtener imágenes de sección transversal en cada dirección ortogonal de la loseta por lo que se tiene sección transversal en la dirección X e Y, en dicha sección se muestra el gráfico de distancia versus tiempo que representa las llegadas de las ondas electromagnéticas viajando en el medio analizado. Para el caso de la sección transversal X, se aprecia la formación de hipérbolas de difracción justo a la distancia de 0.40m, que corresponde al centro de la loseta tanto para la loseta 1 y 2 lo cual demuestra y concuerda que en esa ubicación se encuentra la existencia de la barra o set de barras de acero. La hipérbola ilustra la difracción de la onda, generada por la presencia de un medio más opaco, es decir de mayor constante dieléctrica, y captada moviendo la antena según un perfil en la superficie de la loseta transversal a la barra. Mientras que en la dirección Y, se observa un patrón constante de variación de intensidad de la amplitud que corresponde a la llegada de la difracción generada por la(s) barra(s) embebida(s) en la loseta a lo largo de su longitud. A continuación en la figura III-9 se muestran las imágenes para las losetas 3 y 4 que en su interior tienen varillas de acero según la descripción presentada en la tabla III-1.

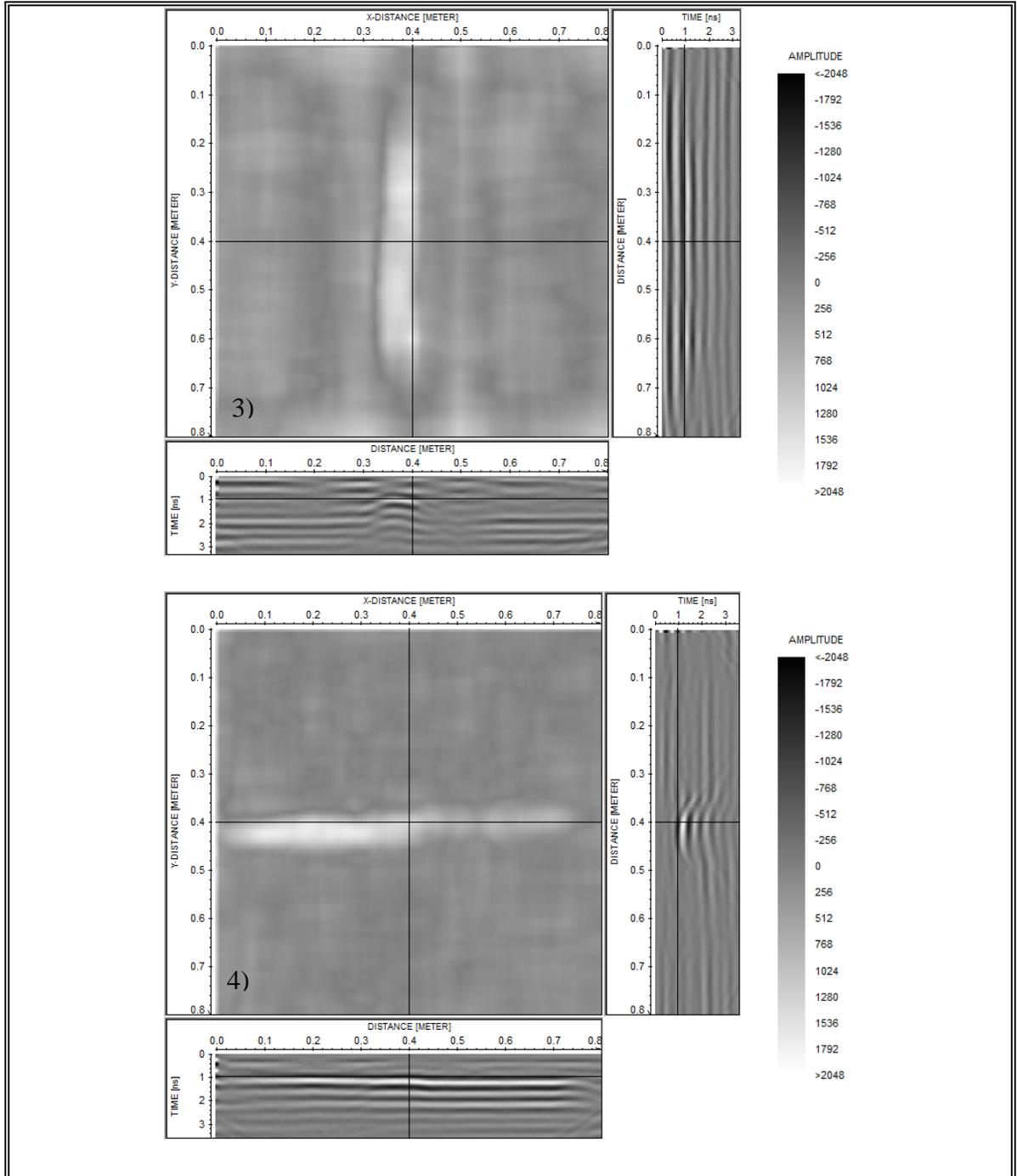


Figura III-9: 3) Loseta con dos barra una de 8mm y otra de 4mm de diámetro de 40cm 4) Loseta con dos barras de 10mm de diámetro con 6cm de traslape al centro de la losa de 20cm cada una.

De la figura III-9 tanto la loseta 3 y 4 se puede apreciar claramente la existencia de la barras de acero en la zona central de las losetas en las vistas en planta de la imagen y en la sección transversal acorde a las observaciones hechas para la loseta 1 y 2, lo que resulta relevante mencionar en la imágenes de las losetas 3 y 4 es que la disposición de las varilla para la loseta 3 tienen uniones mediante traslapes y para la loseta 4 están superpuestas espaciadas en entre ellas a una distancia de 20mm, pero la imagen no logra reflejar en detalle dichas características.

En materiales tales como el hormigón armado es normal encontrar más de una malla de refuerzo, uniones de traslape, doblaje de barras para anclaje, etc embebido al interior del hormigón. Tal como se ha mencionado anteriormente las barras de acero usadas en el armado del hormigón tienen alto valor dieléctrico, por lo que son impenetrables, para la onda electromagnética. Esto, junto a la capacidad no suficiente de resolver características pequeñas, puede ser un problema o una limitante si la malla de barras de acero tiene una estrecha separación entre las barras por lo que posiblemente resulta complejo identificar objetos que se encuentren debajo de la primera malla, identificar formas o tamaños, y debido a que se pierde resolución dentro del perfil y es más difícil su interpretación. Por estas razones, en las imágenes mostradas en la figura III-9, si bien es cierto denotan la existencia de un objeto no muestra con claridad la forma y el tamaño que dicho objeto posee, de manera tal de poder identificar detalles como separación, uniones o tamaños propios de cada barra que ha sido colocada. Esto conlleva a la necesidad de que adicional a las mediciones obtenidas con el equipo de georadar es necesario, posteriormente, complementar el estudio mediante el uso de herramientas de modelación numérica, ya sea de índole comercial o de carácter investigativo para la optimización del uso de la antena de medición del radar y dar mejor interpretación a los resultados obtenidos medidos en campo.

A continuación, se presenta en la figura III-10 las imágenes obtenidas para las losetas 5 y 6 las cuales tienen en su interior un listón de madera y dos bolas de pin pon respectivamente al centro, este ultimo simula un vacío por lo que genera un contraste de permitividad y conductividad respecto al hormigón.

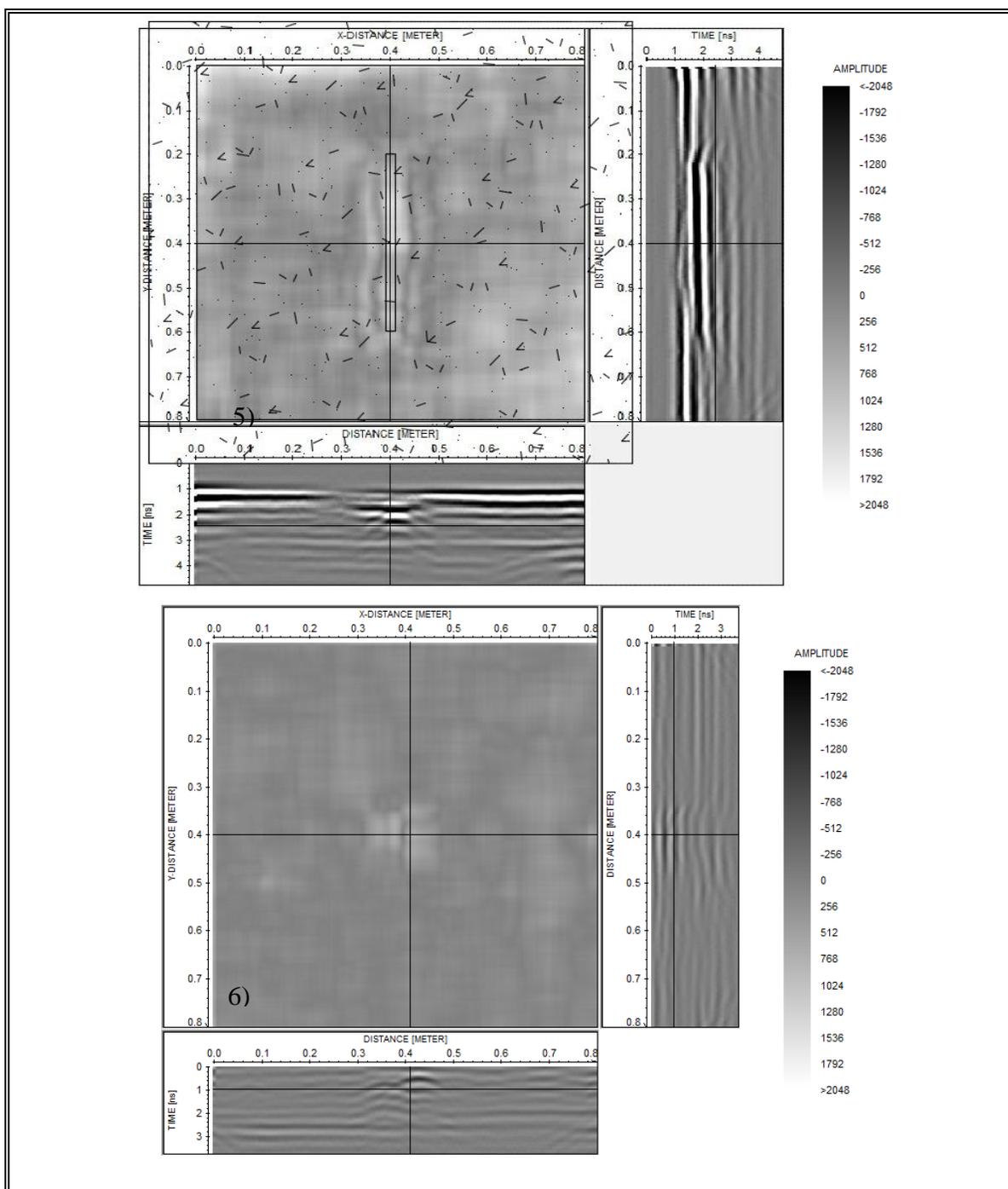


Figura III-10: 5) Loseta con listón de madera de 40cm 6) Loseta con dos pelotas de pin pon topándose a 2 cm al centro de la losa.

Al observar los resultados mostrados en la imagen III-10 para el caso de la loseta 5 la cual contiene en su interior un listón de madera, se puede observar en la imagen en planta del georadar que el objeto se logró identificar su tamaño de forma aproximada y ubicación gracias a la ayuda de una superposición de un dibujo a escala, a pesar que la madera es un material orgánico el cual tiene en su estructura interior fibras continuas de madera y vacíos, por lo que la constante dieléctrica de la madera puede ser igual o inferior a la del hormigón. Por lo que para el caso que se evaluó, la muestra de madera utilizada previo a ser embebida en la loseta de hormigón presentó un aspecto denso y continuo además de ser una muestra de madera joven sin presentar ningún tipo de degradación en su aspecto, por lo que georadar debido a la existencia de un contraste en las propiedades físicas del objeto de madera embebido en el hormigón, resulta posible ser detectado por el ensayo de georadar.

Es importante mencionar que para el entendimiento de la madera, es necesario desarrollar estudios propiamente de las propiedades físicas de la madera haciendo uso del georadar de manera tal que se permita tener un mayor conocimiento y comprensión de la variación de su constante dieléctrica y conductividad eléctrica, según su forma, edad, consistencia y densidad de las muestras de madera, pero dicho estudio y análisis esta fuera de los alcances del presente documento.

Para el caso de la loseta 6 la cual contiene en su interior dos bolas de pin pon, las cuales tienen una forma esférica de 40mm de diámetro, son huecas y livianas, están fabricadas de celuloide plástico, el cual permite que reboten mucho por lo que su constante dieléctrico es igual in inferior a la del concreto, debido a ello la imagen en planta del radar es bastante tenue a pesar de haberse obtenido con filtros de ganancia. Gracias a estos filtros, en la sección trasversal se evidencia la existencia de los objetos debido a la formación de las hipérbolas de reflexión que producen la ondas electromagnéticas al chocar con la superficie del objeto. A continuación en la línea de observación de elementos de igual constante dieléctrica se presenta la figura III-10.

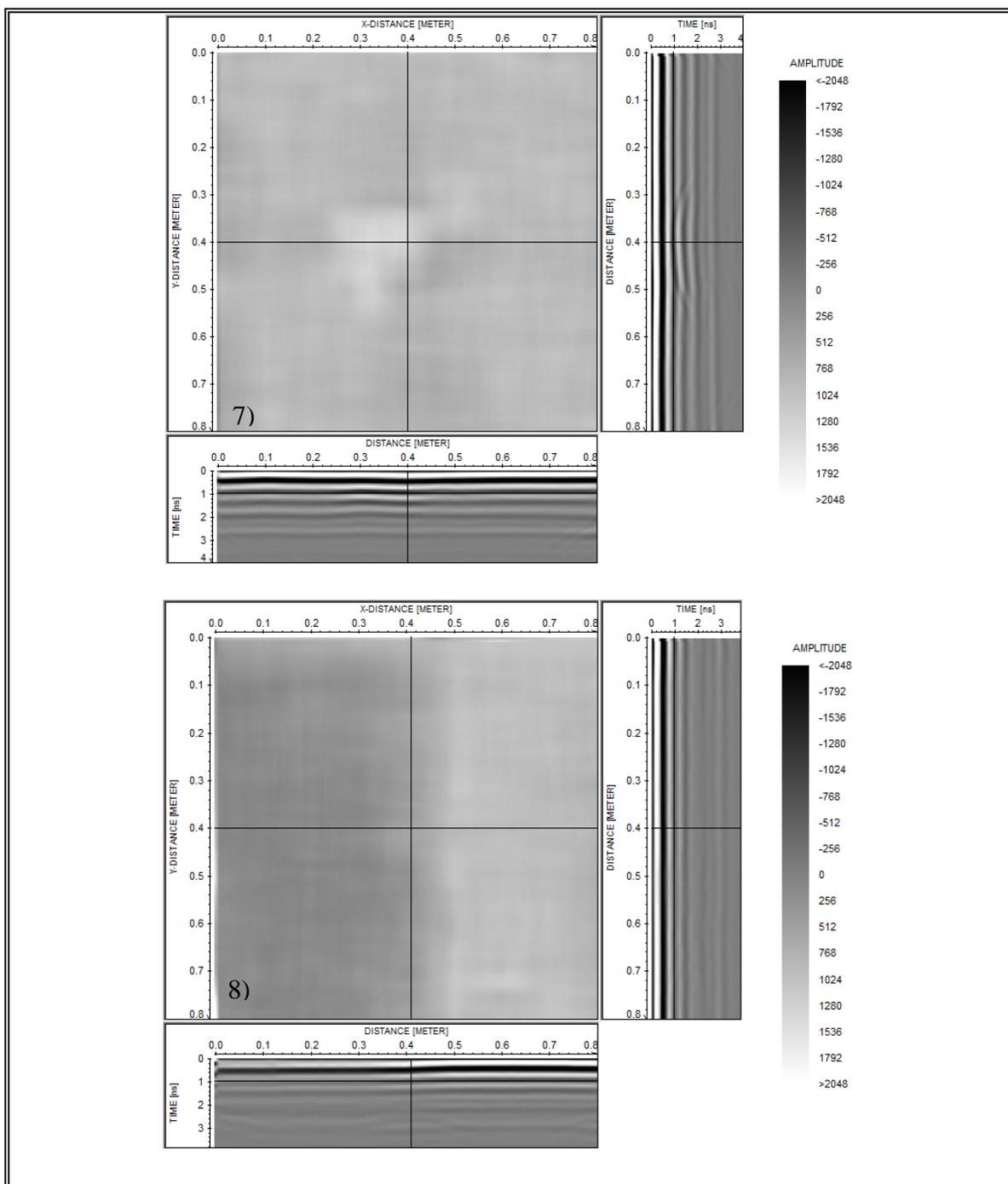


Figura III-10: 7) Loseta rellena con cuadrado de polietileno al centro 8) Loseta compuesta de dos tipos de hormigón distinto.

Continuando en la línea de ensayos no destructivos aplicados a elementos de similar constante dieléctrica, se observan los resultados que se muestran en la figura III-10, que corresponden a la loseta 7 la cual posee en su interior al centro de la misma la colocación de un cuadrado de poliestileno y luego se observan los resultados de la imagen obtenida para loseta 8 que fue construida con dos tipos de hormigón de propiedades de resistencia distinta por lo que poseen módulos de elasticidad diferentes.

En el caso de la loseta 7 la imagen obtenida es bastante tenue y uniforme en las amplitudes de onda medida, por lo que la ubicación y forma exacta del cuadrado de poliestileno en la imagen en planta no se logra apreciar con mucha definición, en vista de que el material posee una constante dieléctrica similar a la del hormigón, en las secciones transversales gracias al filtro de ganancia aplicado se puede apreciar la generación de hipérbolas extendidas que marcan la presencia del objeto al centro de la loseta.

En cuanto a los resultados de la loseta 8 que posee dos tipos de hormigón que varían en sus propiedades mecánicas de resistencia y módulo de elasticidad se aprecia claramente en la vista en planta de la imagen del radar la diferencia entre ambos vaciados de hormigón, en vista que el hormigón es una mezcla de elementos básicos como cementos, arena, grava, agua, aditivos y aire, por lo que la alta permitividad eléctrica del agua contrastada con la mínima permitividad del aire, pueden hacer variar de manera importante el valor dieléctrico de la mezcla resultante. Por lo tanto, el hormigón endurecido de propiedades mecánicas distintas en resistencia y rigidez dependen mucho de la dosificación de los elementos ya mencionados que, variando la proporción en la que fueron mezclados, modifican las propiedades mecánicas y a su vez las permitividad eléctrica, por esa razón la notoriedad en la división de los dos hormigones con los que se construyó la loseta 8.

Un cambio de permitividad eléctrica y, por lo tanto, de la velocidad de propagación de la onda electromagnética parece manifestarse también en la sección vertical transversal a la separación entre los dos hormigones. En este corte se observa que, en la parte derecha de la loseta, la onda se propaga más rápidamente.

Finalmente, en la línea de ensayos de materiales de similares propiedades de permitividad eléctrica se muestran los resultados de la imagen correspondiente a la figura III-11, según la descripción mostrada en la tabla III-1 de la composición de las losetas.

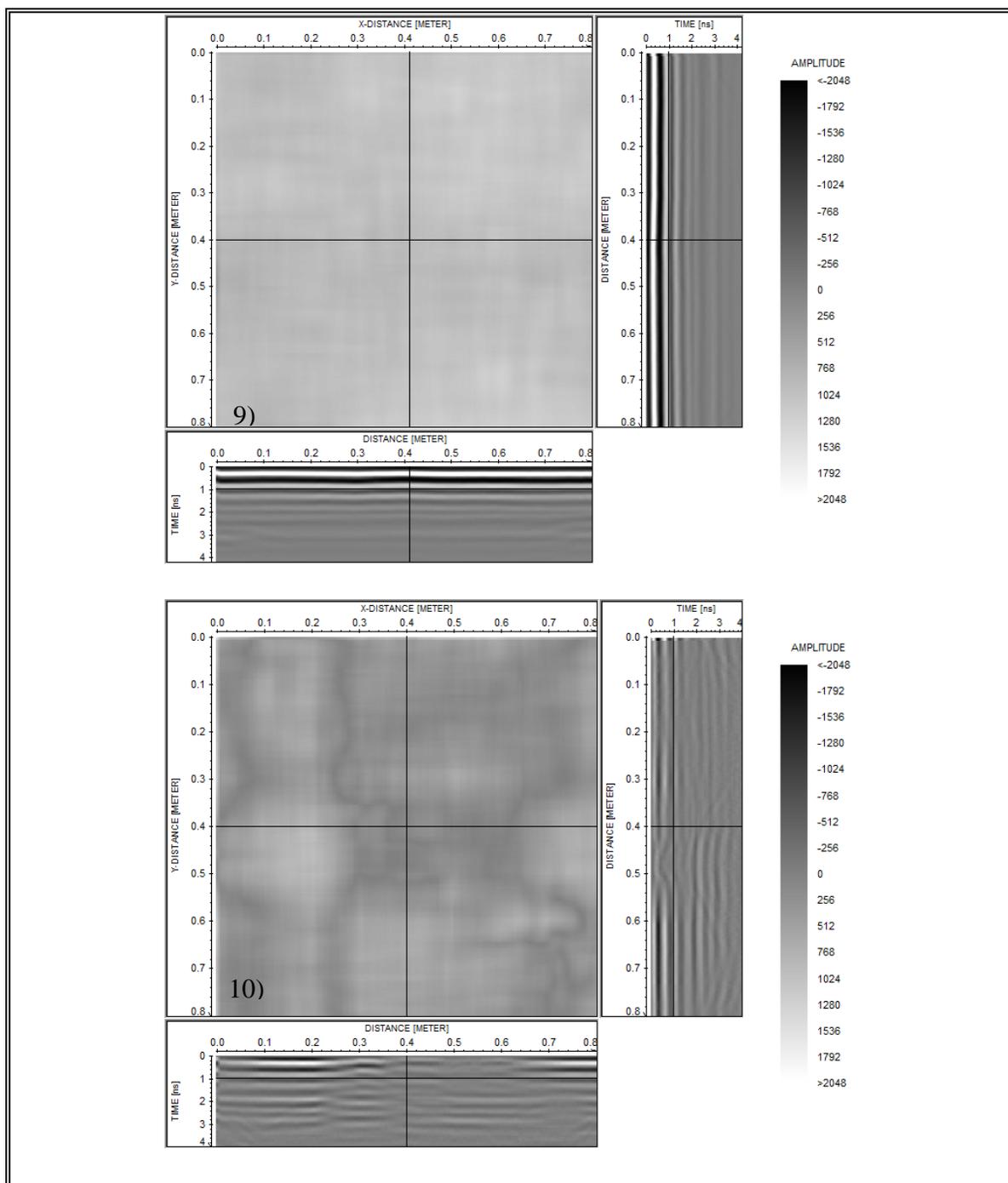


Figura III-11: 9) Loseta de dos hormigones iguales vaciados en momentos distintos 10) Loseta con fisuras superficiales.

Para el caso de la imagen mostrada en la figura III-11, que corresponde al resultado obtenido del ensayo realizado a la loseta 9 compuesta por dos hormigones iguales vaciados en momento distintos. Al no existir una dosificación distinta en las proporciones de los elementos básicos con los que se produce un hormigón; no existe al final del endurecimiento del hormigón, variación en sus propiedades mecánicas. Por lo que también sus propiedades de permitividad y conductividad eléctrica deben resultar igual, lo cual se confirma en la imagen en planta de la loseta obtenida por el radar, el cual es un resultado uniformemente distribuido de valores de amplitud de onda electromagnéticas similar. A pesar de que fueron vaciados en momentos distintos los hormigones al ser iguales, con el paso del tiempo al finalizar el proceso de endurecimiento el hormigón resulta ser el mismo.

Para el caso de la loseta 10, al momento del endurecimiento se produjeron intencionalmente sobre la superficie de la loseta fisuras, las cuales interrumpen la continuidad del espacio de la superficie, incorporando líneas continuas de vacío, las cuales se aprecian debido al cambio de polaridad de la amplitud de la onda es decir las líneas que se aprecian en tonalidad de gris oscuro son la representación de la existencia de un vacío o falta de continuidad en la homogeneidad del material en esta caso debido a la existencia de un patrón de grietas las cuales se produjeron en su mayoría al centro de la loseta y que concuerda con el patrón medido en la imagen del radar. Adicionalmente en las secciones transversales de la dirección X e Y en la zona cercana al centro de la loseta se aprecia la generación tenue de hipérbolas que indican la variación de un cambio en la homogeneidad del material. Finalmente se presentan los resultados de ensayos realizados en losetas con objetos embebidos en su interior con constante dieléctrica igual o levemente superior a la del hormigón, ilustrados en la figura III-12, para la loseta 11 y 12.

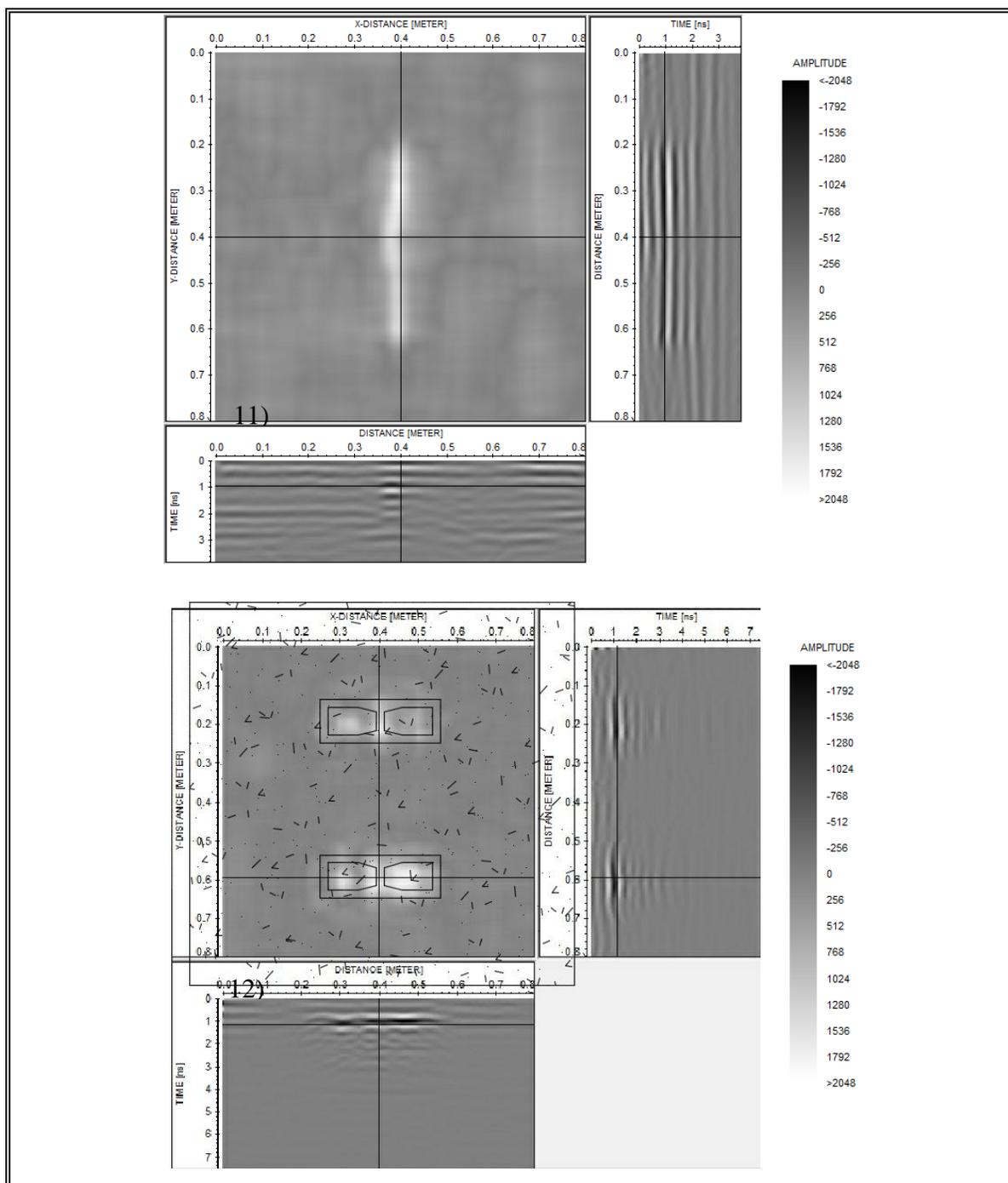


Figura III-12: 11) Loseta con tubo de PVC de diámetro 20mm y 40cm de longitud 12) Loseta con dos bloques de ladrillos de concreto.

Finalmente de la serie de ensayos realizados se procedió en la obtención de la imagen de radar correspondiente a la loseta 11 y 12 las cuales tienen embebidas en su interior un tubo de PVC y dos bloques de ladrillos respectivamente, con la finalidad de observar cual es el rendimiento y capacidad de detección de objetos del radar que poseen una constante dieléctrica igual o levemente superior al a la del hormigón.

Para el caso de la loseta 11 con el tubo de PVC embebido se obtuvo una imagen clara luego de aplicado los filtros de ganancia, con ello se permitió realzar la ubicación del tubo del PVC, y en las secciones transversales de corte en la dirección X e Y, se observan capas con patrones bien definidos de la existencia de hormigón, tubería y existencia de vacío producido en el interior de la tubería que resta volumen al hormigón vaciado en la construcción de la loseta.

Para el caso de la loseta 12 con la existencia de dos ladrillos en su interior basto con la aplicación de la corrección de distancia en tiempo cero y la remoción del ruido de fondo para la obtención de la imagen de radar la cual se superpuso un dibujo a escala para ilustrar la forma y ubicación de los ladrillos, la cual coincide en gran manera con las medidas obtenidas por la imagen del radar, y adicionalmente se aprecia la inversión de polaridad que se da en los huecos del ladrillo el cual fue rellenado con papel para evitar el ingreso del hormigón, que se aprecia con detalle en la vista en planta de la imagen al notarse el cambio de polaridad de la amplitud de la onda electromagnética.

### **III.5 Obtención de imágenes en muro e interpretación de resultados**

La mampostería es un sistema de construcción que consiste en levantar muros a base de bloques de piedra, hormigón o arcilla cocida. Su nombre alude a la colocación a mano, por lo que el interés de estudio del presente capítulo se ha focalizado en la realización de ensayos de GPR en un muro de bloque de hormigón con huecos o celdas de vacío que permiten ser rellenadas con hormigón fluido (grout) y barras de acero de refuerzo. Debido como ya fue mencionada la colocación es a mano, eso conlleva a la existencia de deficiencias constructivas, para el caso de las celdas que deben ser rellenadas por la colocación de una barra de acero, puede darse el fenómeno que en el altura no se mantenga constante la columna de celdas que deben ser rellenadas de forma uniforme, por lo que la barra de acero tendría puntos de deficiencia de confinamiento al no existir grout que lo confine.

Se procedió a realizar el estudio en dos muros de mampostería aplicando los conceptos del GPR y en base a las recomendaciones dadas por el ACI 228.2R, ASTM D4748 y ASTM D6432, que brindan lineamientos estandarizados para la realización de las mediciones, con ello se realizó el ensayo en dos muros el primero de dimensiones 1.02m de ancho por 2.27m de alto y el segundo de 2.64m de ancho por 2.27m de alto, ver figura III-13 en la que se muestra elevación de muro con la distribución de refuerzo vertical y horizontal colocado en cada uno de los muros.

Para la realización del ensayo se definió un área de estudio correspondiente al muro 1 (muro corto), un segmento rectangular de dimensión de 0.80m de ancho por 1.00m de alto centrado respecto al área total del muro, y para el caso de estudio del muro 2 (muro largo), se ha definido un segmento rectangular de 1.40m de ancho por 1.00m de alto ubicado al costado derecho del muro tal como se ilustra en la figura III-13. Correspondiente al dibujo del muro completo se muestran en achurados las áreas ensayadas.

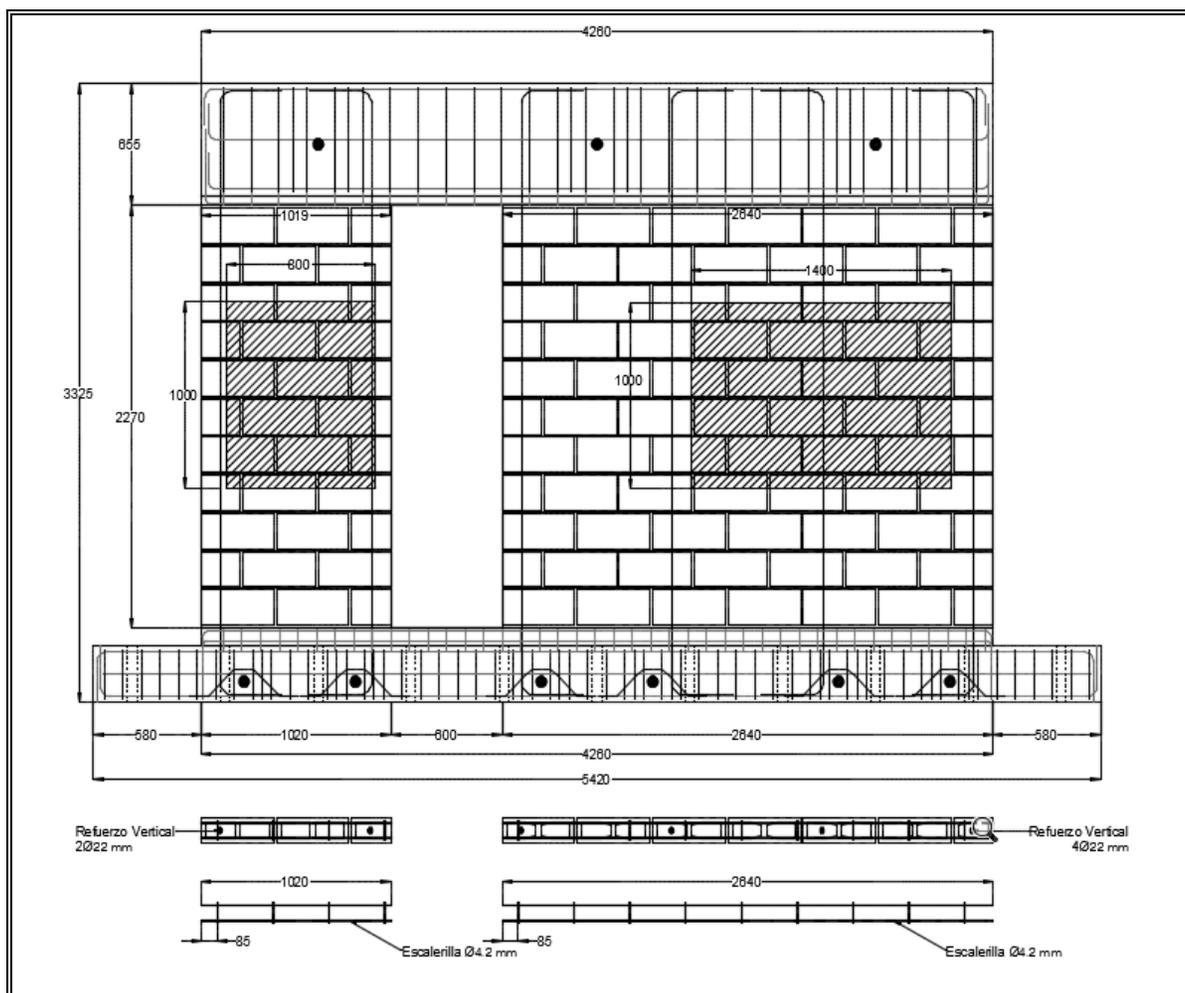


Figura III-13: Elevación estructural de muro de ensayado con GPR( dimensiones en mm).

Definidas las condiciones de borde para el área de estudio se procedió a obtener los datos como resultado de la realización del ensayo a través del uso del equipo MALA CX, cuya metodología es igual a la descrita para el caso de las losetas, luego de obtenidos los datos medidos se procede con la realización del procesamiento de datos el cual también es igual a la metodología descrita para el caso de losetas, haciendo uso del programa ReflexW, para el caso del pre-procesamiento y ordenamiento de la información, la cual una vez organizada se procede con la generación de la imagen haciendo uso del programa Reflex3DScan. Ver figura III-14, superposición de imagen de radar obtenida del procesamiento de datos medidos con el GPR.



Figura III-14: Elevación estructural de muro y superposición de resultado de imagen de radar de ensayo con GPR.

En cuanto a los resultados obtenidos del muro corto se observa detalles relevantes del interior del muro, tal es el caso del refuerzo horizontal que se encuentra colocado entre la sisa (línea de unión entre cada fila de bloques) y rellena de mortero cuya función sirve como pegamento de bloques; se observa claramente en la sección transversal de la imagen del radar, la formación de las hipérbolas que se forman debido al choque de la onda electromagnética con un material con una alta constante dieléctrica y conductividad eléctrica, y que identifican la ubicación exacta de la presencia de las barras de acero que corresponde a las 5 sisas comprendidas en la distancia vertical de 1.00m analizada, por lo que en efecto se forman 5 hipérbolas.

Adicionalmente, como resultado relevante, se observa en la escala de grises que identifican los valores de amplitud de onda electromagnética la diferencia de señal entre los huecos de los bloques de hormigón rellenos de grout respecto a los que están vacíos. Acorde al detalle de la elevación estructural mostrado en la figura III-13, las celdas o huecos de bloques de hormigón vacíos corresponde a donde no se encuentra colocada una barra acero, mientras en los límites establecidos del área del ensayo se abarca parte de las columnas de bloques de hormigón rellenos de grout (extremos de la imagen). En estas porciones del muro la señal del radargrama se muestra con una tonalidad gris oscura, mientras que al centro de la lectura de datos se puede interpretar la presencia de los huecos o celdas vacías (color blanco o gris muy claro) validando el detallado estructural definido en planos. Con el objeto de apreciar con mayor claridad lo acá descrito se presenta una ampliación de la imagen procesada y obtenida del muro corto en la figura III-15.

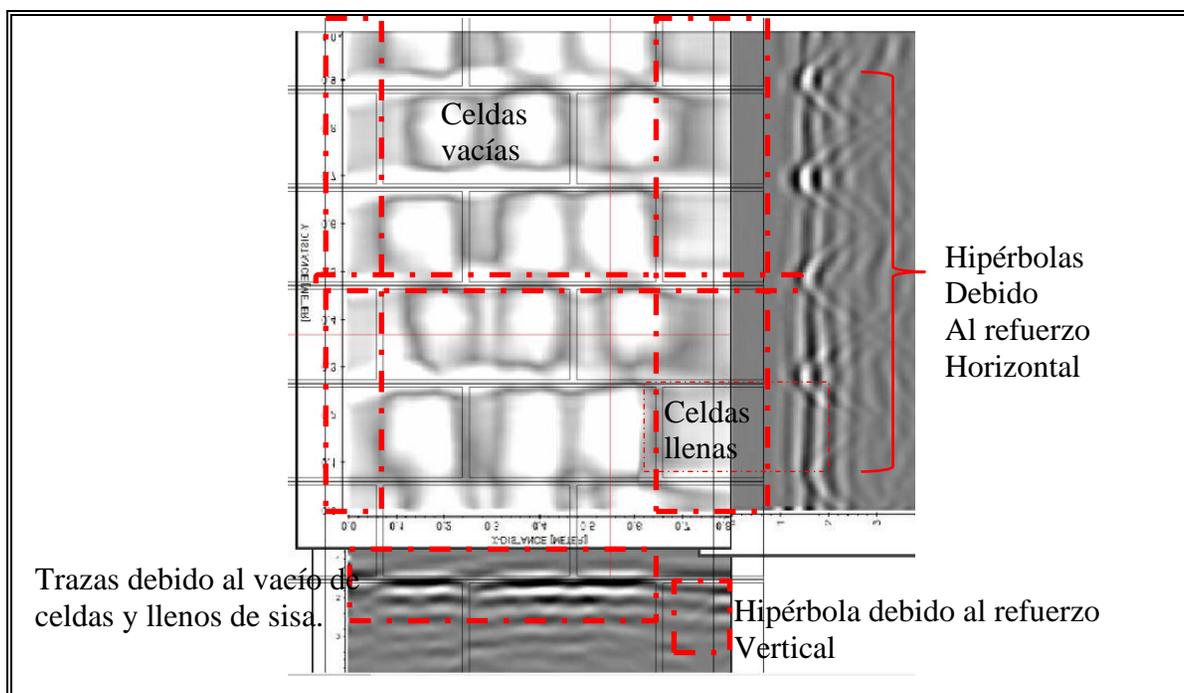


Figura III-15: Imagen de radar ampliada de muro corto.

En relación a los resultados obtenidos para el muro largo, debido a que el ancho de análisis corresponde a 1.40m, se obtuvo un mayor rango de lecturas, como se puede apreciar en la imagen ampliada mostrada en detalle en la figura III-16. El análisis de esta porción de muro muestra resultados interesantes relacionados a la detección del refuerzo horizontal, que se ilustra en la imagen del corte vertical donde se muestra la presencia clara de hipérbolas que ocurren en la ubicación exacta de las barras de acero horizontal embebidas en la sisa de pegamento y unión de hiladas de bloques de hormigón. Adicionalmente, en la imagen del corte horizontal se aprecia las trazas correspondiente a la existencia de vacíos en las celdas de bloques de hormigón no llenos de grout, la presencia de una barra vertical (hipérbola) y la presencia de grout en toda la altura de la columnas de celdas por las cuales transcurre la longitud de la barra vertical.

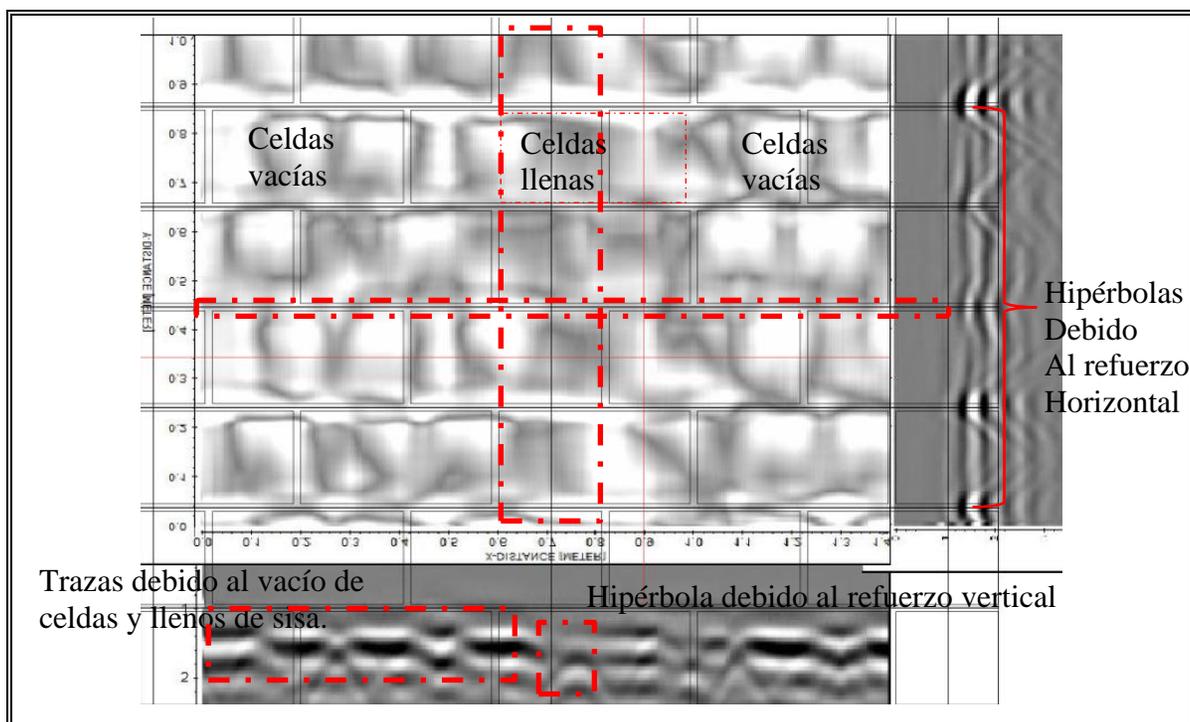


Figura III-16: Imagen de radar ampliada de muro largo.

De la figura III-16, se puede observar también la existencias de celdas llenas de manera discontinua en lugares donde no se ha colocado refuerzo de barra de acero vertical, esto podría ser debido al ingreso de mortero de pegamento que se coloca en las sisas que ingresa en la celda del bloque de hormigón, debido a la fluidez y la cantidad requerida para ser colocada las barras de acero horizontal conlleva que se desplace y se precipite cantidad de mortero fluido (grout) a través de la celdas quedando, parcialmente llenas y mostrando un patrón discontinuo tal cual se aprecia con detalle en la imagen de escaneo de la superficie de la pared.

Tanto para el caso de las losetas y para el muro se observan desfase o corrimientos en la imagen, debido a imperfecciones que se suscitan durante la toma de las lecturas, pues una causa de error común que se produce durante la movilización de la antena es la falta de precisión en mantener constante el punto de partida, en línea recta el desplazamiento de la antena. A pesar que se dispone de una cuadrícula guía, durante el movimiento de la antena se producen corrimientos, desviaciones u oscilaciones en el desplazamiento lo cual se refleja en la imágenes de escaneo superficial. Al observarse corrimientos o efectos de curvamiento visual de los objetos embebidos, detectados por el radar. Por lo que depende mucho de la habilidad de la persona que toma y realiza la medición con la sincronización que debe tener en el manejo de la antena con la manipulación del equipo para la captura de datos. El uso de rieles guía ayuda en alguno de los caso superar esta limitante, cuando las lecturas se realizan en espacios libre de obstrucciones para la colocación del riel guía.

Las condiciones ambientales sugeridas para el uso del equipo MALA CX, en la medición de elementos estructurales, se recomienda que sean en temperaturas ambientales normales alejadas de extremos de bajas o altas temperaturas, no exponer el equipo receptor y procesador de datos al sol en prolongados periodos de tiempo, pues esto evita que el equipo se vuelva lento, o en alguno casos experimente problemas de lectura debido a que se bloquea y detiene el procesamiento de captura de datos.

## IV. MODELACION NUMERICA GPR PROBLEMA DIRECTO.

### IV.1 Diferencias finitas: generalidades

Las ecuaciones de Maxwell presentadas en el capítulo II, están englobadas dentro de un tipo de ecuaciones diferenciales, denominadas ecuaciones hiperbólicas. En este apartado se exponen los conceptos básicos concernientes a la teoría de aproximación de operadores diferenciales (Por ejemplo las derivadas parciales que aparecen en las ecuaciones de Maxwell) mediante diferencias finitas.

Cuando se plantea resolver una ecuación diferencial, además de la propia ecuación es necesario considerar unas condiciones iniciales y/o de contorno. Estas condiciones auxiliares junto con la ecuación deben constituir un problema bien propuesto, es decir, que sea necesario garantizar la existencia y unicidad de la solución.

El método de diferencias finitas es una técnica numérica de tipo discreto en la que la ecuación diferencial continua original se resuelve de forma aproximada en un conjunto finitos de puntos localizados en el dominio donde se desea encontrar la solución. Es decir se pasa de un problema continuo a otro discreto. Estos puntos se suelen identificar con los nudos de una red o malla que se utiliza para subdividir la región del espacio problema. En la figura 1-18, se ilustra un esquema en el que una región espacio temporal es discretizada mediante una malla. Por ejemplo en el proceso de discretización los parámetros de malla  $\Delta_x$  e  $\Delta_y$ , son la dimensiones de la celda espacial en dos dimensiones y  $\Delta_t$  el paso temporal, por lo que este proceso de discretización los parámetros de la malla juegan un papel importante, ya que a medida que estos parámetros disminuyen, el dominio de la solución discreto tiende al dominio de la solución continuo o en otras palabras, la solución del problema algebraico tiende a la solución del problema diferencial.

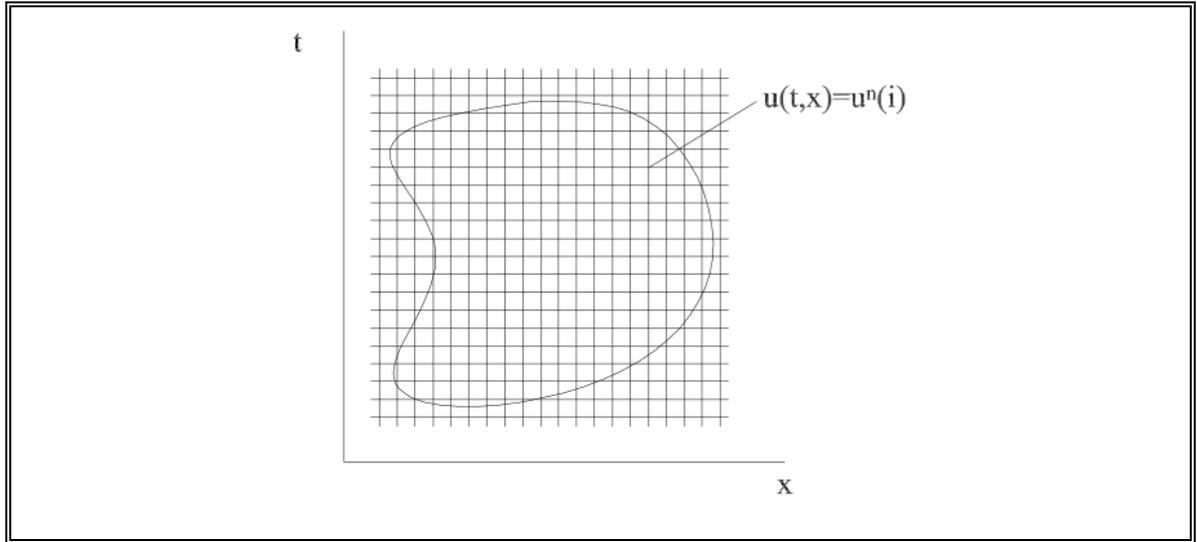


Figura IV-1: Discretización en región espacio tiempo de interés.

## IV.2 Aproximación de los operadores diferenciales mediante diferencias finitas. Caso de una variable.

El fundamento matemático de los métodos de diferencias finitas es el desarrollo de una función en serie de potencias descubierto por Taylor en 1715. Este desarrollo permite predecir el comportamiento global de una función con tan solo conocer el valor de la función y de todas sus derivadas en un punto. El desarrollo en serie de Taylor se puede expresar de la siguiente manera:

$$U(x + \alpha\Delta_x) = U(x) + \frac{\alpha\Delta_x}{1!} \frac{dU(x)}{dx} + \frac{(\alpha\Delta_x)^2}{2!} \frac{d^2U(x)}{dx^2} + \dots + \frac{(\alpha\Delta_x)^n}{n!} \frac{d^nU(x)}{dx^n} \quad (4.1)$$

Esta expresión evalúa la función en el punto  $x + \alpha\Delta_x$  a partir de los valores de la función y sus derivadas en el punto  $x$ . A partir de este desarrollo, se obtienen las expresiones en diferencias finitas que permiten calcular el valor de una función o sus derivadas en ese punto.

Aproximación de la primera derivada mediante diferencias finitas por la derecha o hacia adelante; si en (4.1) se toma  $\alpha=+1/2$  y se despeja el término de la primera derivada se tiene:

$$\frac{dU(x)}{dx} = \frac{U(x+\Delta_x/2)-U(x)}{\Delta_x/2} - \frac{1}{2!} \frac{\Delta_x}{2} \frac{d^2U(x)}{dx^2} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\Delta_x}{2}\right)^2 \frac{d^3U(x)}{dx^3} \dots \quad (4.2)$$

Al agrupar los términos se tiene:

$$\frac{dU(x)}{dx} = \frac{U(x+\Delta_x/2)-U(x)}{\Delta_x/2} + O(\Delta_x^n) \quad (4.3)$$

Donde  $O(\Delta_x^n)$  denota los términos que contienen las potencias de  $\Delta_x$  de donde n o superiores. Si se supone que  $\Delta_x$  es lo suficientemente pequeño como para que los términos  $O(\Delta_x^n)$  se puedan despreciar, se obtiene la expresión que permite calcular la primera derivada de una función utilizando diferencias finitas.

$$\frac{dU(x)}{dx} \cong \frac{U(x+\Delta_x/2)-U(x)}{\Delta_x/2} \quad (4.4)$$

Esta aproximación de la primera derivada mediante diferencias finitas se conoce como aproximación hacia adelante o por la derecha. Además, puesto que el primer término  $O(\Delta_x^n)$  tiene dependencia con  $\Delta_x$ , se dice que esta aproximación de la derivada presenta un error de truncamiento de primer orden.

Aproximación de la primera derivada mediante diferencias finitas por la izquierda: si en (4.1) se toma  $\alpha=-1/2$  y se despeja nuevamente el término de la primera derivada:

$$\frac{dU(x)}{dx} = \frac{U(x)-U(x-\Delta_x/2)}{\Delta_x/2} + \frac{1}{2!} \frac{\Delta_x}{2} \frac{d^2U(x)}{dx^2} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\Delta_x}{2}\right)^2 \frac{d^3U(x)}{dx^3} + \dots \quad (4.5)$$

Al agrupar los términos se tiene:

$$\frac{dU(x)}{dx} = \frac{U(x)-U(x-\Delta_x/2)}{\Delta_x/2} + O(\Delta_x^n) \quad (4.6)$$

Al despreciar el término  $O(\Delta_x^n)$  se tiene:

$$\frac{dU(x)}{dx} \cong \frac{U(x) - U(x - \Delta_x/2)}{\Delta_x/2} \quad (4.7)$$

Esta aproximación de la primera derivada mediante diferencias finitas se conoce como aproximación hacia atrás o por la izquierda.

Aproximación de la primera derivada mediante diferencias finitas centradas al sumar se tiene:

$$\frac{dU(x)}{dx} = \frac{U(x + \Delta_x/2) - U(x - \Delta_x/2)}{\Delta_x} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\Delta_x}{2}\right)^2 \frac{d^3U(x)}{dx^3} - \frac{1}{5!} \left(\frac{\Delta_x}{2}\right)^4 \frac{d^5U(x)}{dx^5} - \dots \quad (4.8)$$

En forma compacta la ecuación anterior se puede expresar como:

$$\frac{dU(x)}{dx} = \frac{U(x + \Delta_x/2) - U(x - \Delta_x/2)}{\Delta_x} + O(\Delta_x^{2n}) \quad (4.9)$$

Por tanto si se asume que  $\Delta_x$ , es muy pequeño se puede redefinir como:

$$\frac{dU(x)}{dx} \cong \frac{U(x + \Delta_x/2) - U(x - \Delta_x/2)}{\Delta_x} \quad (4.10)$$

La ecuación (4.9) se conoce como aproximación de la primera derivada mediante diferencias finitas centradas. Puede apreciarse que se trata de una aproximación centrada, ya que involucra valores de la función tanto a la derecha  $U(x + \Delta_x/2)$  como a la izquierda  $U(x - \Delta_x/2)$ , del punto que se desea calcular la derivada. En la figura IV-2 se ilustra que geoméricamente la aproximación centrada representa la pendiente de la recta que pasa por los puntos A y B, tendera a la solución exacta a medida que disminuya el valor del incremento de la variable independiente  $\Delta_x$ , ya que la derivada se corresponde gráficamente con la pendiente de la recta tangente de la curva.

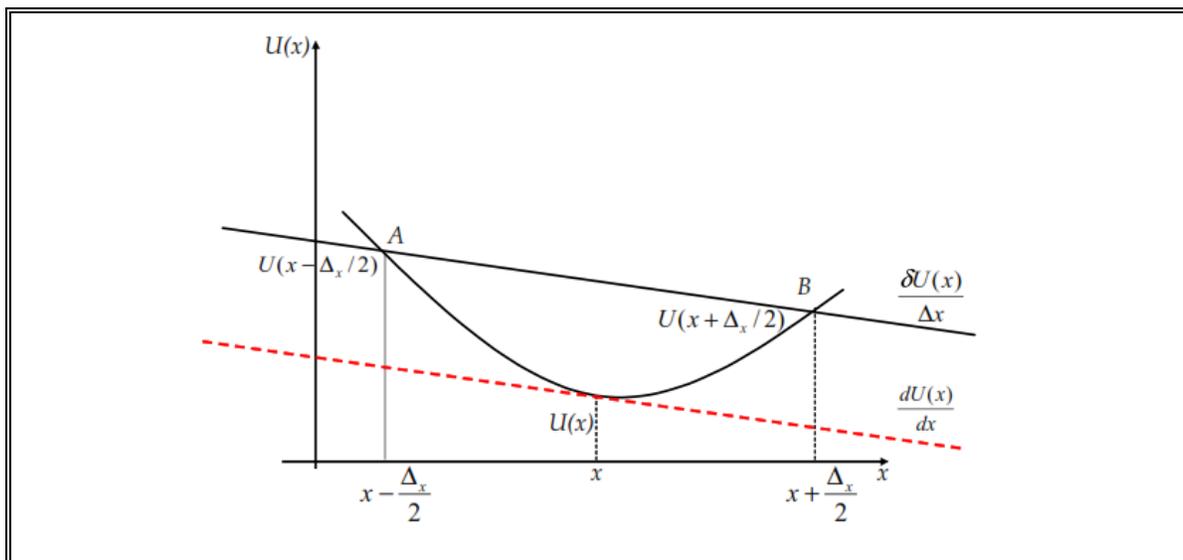


Figura IV-2: Interpretación gráfica de la derivada de diferencias finitas centradas.

### IV.3 Método de FDTD generalidades

El método FDTD, introducido por K.S. Yee, en la comunidad electromagnética en el año 1966, consiste en esencia, en la sustitución de las derivadas parciales que aparecen en las ecuaciones de Maxwell del rotacional por coeficientes de diferencias finitas centradas. Para poder llevar a cabo esta sustitución de diferenciales por incrementos, se discretiza el espacio-tiempo mediante una malla discreta. En consecuencia el problema diferencial se transforma en un problema en diferencias (algebraico), es decir, es un sistema de ecuaciones lineales. El esquema de Yee para la discretización de las ecuaciones de Maxwell es el más conocido y de uso más frecuente dentro de la gama de métodos FDTD. El cálculo del campo eléctrico magnético en un nudo de la malla y en un instante de tiempo, solo precisa de los valores del campo magnético en los nudos adyacentes y en el instante anterior. De esta forma, partiendo de unas condiciones iniciales, el método permite calcular la evolución temporal del campo electromagnético en la región de interés. Además, a partir de una sola simulación, este método permite conocer la respuesta frecuencial

para todo el ancho de banda deseado mediante el análisis espectral de la respuesta temporal.

A continuación se presenta nuevamente las ecuaciones de Maxwell a partir de las cuales se aplica el método FDTD.

$$\Delta * H = \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} + \sigma E \quad (4.11)$$

$$\Delta * E = -\mu \frac{\partial H}{\partial t} \quad (4.12)$$

Donde E es el campo eléctrico y H el campo electromagnético,  $\varepsilon$  es la constante dieléctrica,  $\sigma$  es la conductividad y  $\mu$  es la permeabilidad.

Considerando el caso 2D, la propagación magnética y eléctrica de los campos de onda se puede ilustrar de la forma que se presenta en la figura IV-3, como la celda Yee de trayecto de la onda electromagnética.

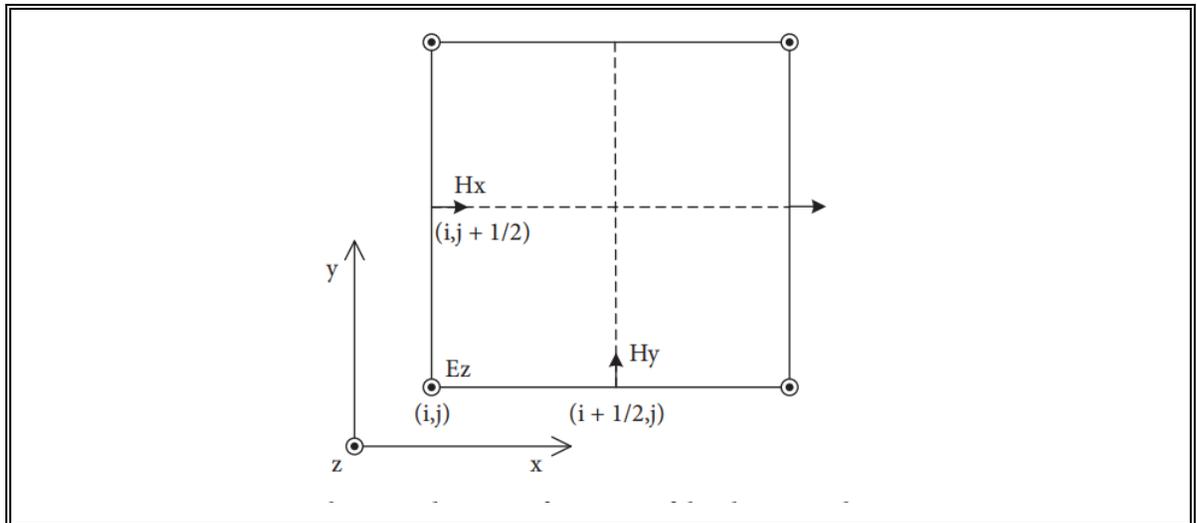


Figura IV-3: Diagrama esquemático de posición del vector de campo eléctrico y magnético.

Por tanto las ecuaciones del magnetismo trasversal pueden ser escritas como:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = -\mu \frac{\partial H_x}{\partial t} \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = \mu \frac{\partial H_y}{\partial t} \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} + \sigma E_z \quad (4.14)$$

Por tanto si se aplica el concepto de diferencia finita centrada para la aproximación de la derivada del espacio y tiempo de los dos campos, la onda electromagnética resulta discretizada y expresada de la siguiente manera:

$$H_x^{n+1/2}(i, j + 1/2) = H_x^{n-1/2}(i, j + 1/2) - \frac{\Delta t}{\mu} * \frac{E_z^n(i, j+1) - E_z^n(i, j)}{\Delta y} \quad (4.15)$$

$$H_y^{n+1/2}(i, j + 1/2) = H_y^{n-1/2}(i, j + 1/2) + \frac{\Delta t}{\mu} * \frac{E_z^n(i, j+1) - E_z^n(i, j)}{\Delta x} \quad (4.16)$$

$$E_z^{n+1} = CA * E_z^n(i, j) + CB * \left[ \begin{array}{c} \frac{H_y^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j) - H_y^{n+\frac{1}{2}}(i-\frac{1}{2}, j)}{\Delta x} \\ - \frac{H_x^{n+1/2}(i, j+1/2) - H_x^{n+1/2}(i, j-1/2)}{\Delta y} \end{array} \right] \quad (4.17)$$

$$\text{Donde } CA = \frac{\left(1 - \frac{\sigma \Delta t}{2\varepsilon}\right)}{\left(1 + \frac{\sigma \Delta t}{2\varepsilon}\right)} \quad \text{y} \quad CB = \frac{\frac{\Delta t}{\varepsilon}}{\left(1 + \frac{\sigma \Delta t}{2\varepsilon}\right)}$$

Este esquema de disposición espacio-temporal de las componentes del campo electromagnético permite la sustitución de las derivadas parciales presentes en las ecuaciones de Maxwell por sus correspondientes aproximaciones mediante diferencias finitas centradas.

#### **IV.4 Método Elementos Finitos generalidades**

El método de elementos finitos es una alternativa numérica al método FDTD para la solución de las ecuaciones diferenciales parciales. Es englobado en el orden de la discretización de campos en el dominio del espacio, mediante la división de pequeño segmentos de formas simples. El mallado resultante puede ser no estructurado y no uniforme. Un mallado no estructurado es una malla cuyos segmentos no son naturalmente indexados a un arreglo multidimensional. Elementos triangulares son comúnmente usados para problemas en dos dimensiones. Sobre estos elementos se generan un conjunto de funciones linealmente independientes que determinan el comportamiento particular del conjunto de manera que sea coherente con el comportamiento general del problema. Las condiciones de frontera permiten establecer el punto de partida de implementación computacional.

El método de los elementos finitos se basa de la construcción aproximada de una solución. Al resolver cualquier problema de elementos finitos involucra cuatro etapas que corresponden a la discretización de la región de solución en un número finito de subregiones o elementos, obtención de las ecuaciones para el elemento típico, proceder al ensamblaje de todos los elementos en la región de la solución y finalmente realizar la solución del sistema de ecuaciones obtenido.

Durante el proceso de la discretización se descompone la región de solución en subregiones denominadas elementos finitos, cuáles serán de geometría simple. En la figura IV-4 se presenta el caso de la discretización de una zona rectangular a partir de triángulos. Las zonas de estudio generalmente son irregulares por lo que un elemento finito rectangular es el menos conveniente.

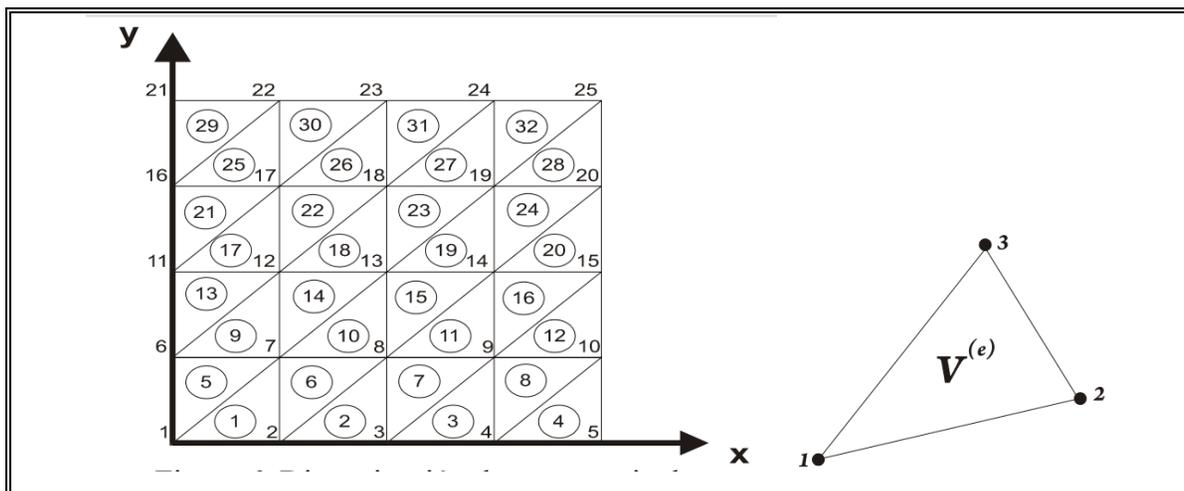


Figura IV-4: Discretización de un espacio en elementos triangulares.

#### IV.5 Combinación del Método de Diferencia Finitas con Método de Elementos Finitos para la resolución de la ecuación diferencial de onda.

A continuación se presenta el desarrollo matemático basado en apuntes dados por el Profesor Sergio Gutiérrez, para la generación del modelo matemático que combina el método de diferencia finita con el método de elementos finitos, para la solución directa del problema de propagación de onda electromagnética, en el espacio de un medio homogéneo.

Definición del problema de condiciones de borde, en el cual se parte del supuesto de un medio homogéneo, colocando en un punto fijo la emisión de la señal, para ello las condiciones de borde quedan definidas por un medio espacial el cual para este caso de estudio será una loseta de hormigón de dimensiones de  $a \times b \times c$  con un objeto cilíndrico al centro, tal como se ilustra en la figura IV-5 que se muestra a continuación.

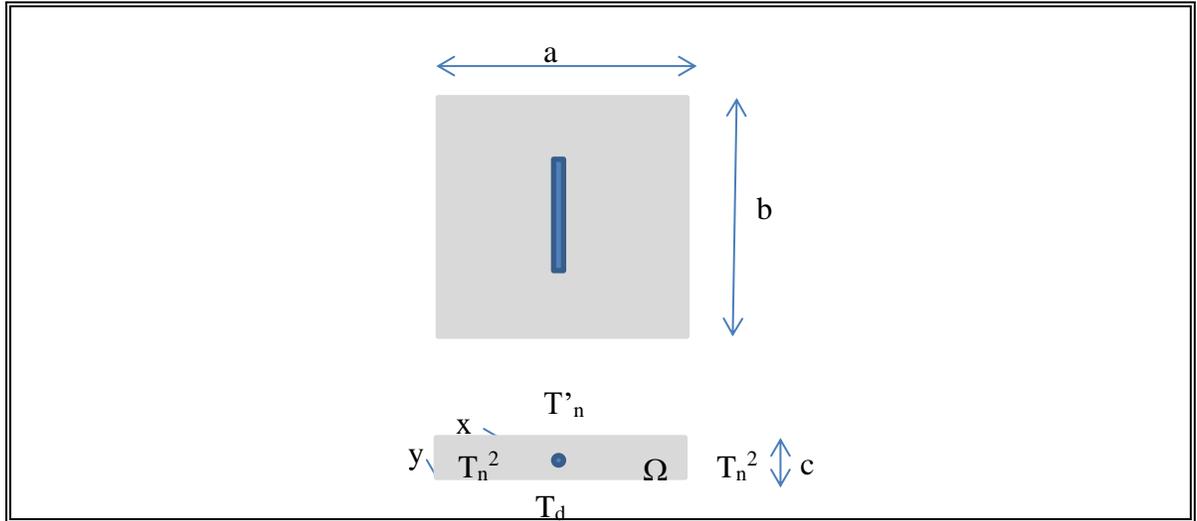


Figura IV-5: Definición de problema directo de condiciones de borde.

A continuación se presenta la ecuación de onda escalar.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \text{div}(a(x,y)\nabla u) = 0 \quad (4.18)$$

Se supone un medio no perturbado al inicio por tanto:

$u = Ez$ , componente del campo eléctrico transversal en  $\Omega \otimes (0,T)$ ,  $u=0$  en  $T_d \otimes (0,T)$ ,  $a\nabla u \cdot \nu = g(x)$  en  $T'_n \otimes (0,T)$  y finalmente  $a\nabla u \cdot \nu = 0$  en  $T_n^2 \otimes (0,T)$ .

Condiciones iniciales:  $U(x,y,0)=0$ ,  $(x,y) \in \Omega$  y  $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ ,  $(x,y) \in \Omega$  en que las ondas de alta frecuencia se desprecian en el término de segundo orden. La posición en el espacio  $(x,y)$ , se mantiene constante en el tiempo, por lo que la emisión de la señal se realiza a partir de una posición fija. A continuación se ilustra mediante la variación en el tiempo de un pulso emitido desde un punto fijo en el plano  $(x,y)$ .

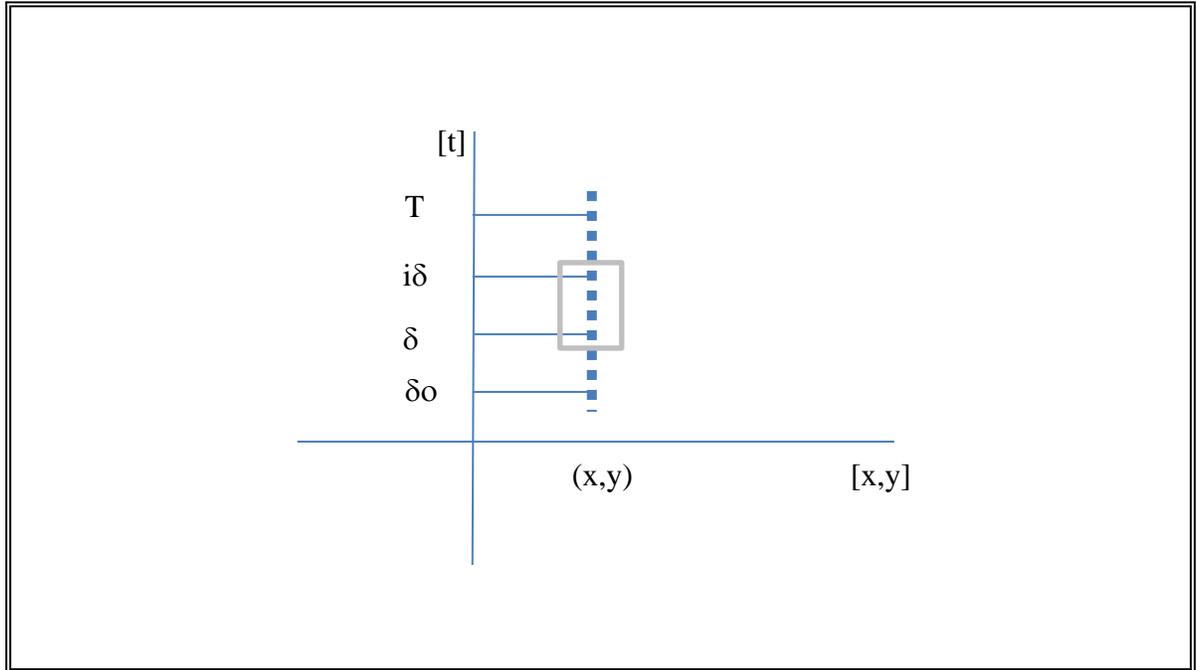


Figura IV-6: Discretización en el tiempo de una señal emitida en un punto fijo.

Aplicando los conceptos de diferencias finitas y elementos finitos se tiene que la ecuación de onda para la discretización de la segunda derivada en el tiempo puede expresarse de la siguiente forma:

$$\frac{\partial^2 u(x,y,i\delta)}{\partial t^2} \cong \frac{1}{\delta} \left( \frac{\partial u(x,y,i\delta)}{\partial t} - \frac{\partial u(x,y,(i-1)\delta)}{\partial t} \right) \quad (4.19)$$

Aplicando el concepto de diferencias finitas implícitas

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,y,i\delta)}{\partial t^2} &\cong \frac{1}{\delta} \left( \frac{1}{\delta} (u(x,y,i\delta) - u(x,y,(i-1)\delta)) - \frac{1}{\delta} (u(x,y,(i-1)\delta) - \right. \\ &\left. u(x,y,(i-2)\delta)) \right) \cong \frac{1}{\delta^2} (u(x,y,i\delta) - 2u(x,y,(i-1)\delta) + u(x,y,(i-2)\delta)). \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u(x,y,i\delta)}{\partial t^2} \cong \frac{1}{\delta^2} (u_i - 2u_{i-1} + u_{i-2}) \quad (4.20)$$

Para las derivadas espaciales se puede definir de la siguiente manera:

$$\chi(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{en material 2} \\ 0 & \text{en material 1} \end{cases}$$

$$a(x,y) = a_2 \chi(x,y) + a_1 (1 - \chi(x,y))$$

Se procede a desaparecer la derivada parcial en el tiempo:

$$(u_i - 2u_{i-1} + u_{i-2}) - \delta^2 \operatorname{div}(a\nabla u_i) = 0 \quad (4.21)$$

$$u_i - \delta^2 \operatorname{div}(a\nabla u_i) = 2u_{i-1} + u_{i-2} \quad \text{en } \Omega$$

Se aplica una función test si  $u_i \rightarrow u$

$$\int_{\Omega} v(u - \delta^2 \operatorname{div}(a\nabla u)) dx dy = \int_{\Omega} v(2u_{i-1} + u_{i-2}) dx dy$$

Desarrollando el lado derecho de la ecuación (4.21)

$$\int_{\Omega} v u dx dy - \delta^2 \int_{\Omega} v \operatorname{div}(a\nabla u) dx dy = \int_{\Omega} v(2u_{i-1} + u_{i-2}) dx dy$$

$$\int_{\Omega} u v dx dy - \delta^2 \left( - \int_{\Omega} a \nabla u \nabla v dx dy + \int_{2\Omega} a \nabla u v ds \right)$$

$$v = 0, \text{ en } T_d, \quad a \nabla u = g \text{ en } T_n, \quad a \nabla u v = 0 \text{ en } T_n^2$$

$$\int_{\Omega} (uv + \delta^2 a \nabla u \nabla v) dx dy - \delta^2 \int_{T'_N} g v ds = \int_{\Omega} v(2u_{i-1} + u_{i-2}) dx dy$$

Aplicando funciones de forma de elementos finitos

$$u = \sum_{j=1}^{N_{malla}} u_j \phi_j(x, y) \quad v = \phi_k; \quad k \in \{1, 2, \dots, N_{malla}\}$$

Por tanto re expresando se tiene:

$$\int_{\Omega} \left( \sum_{j=1}^{N_{malla}} u_j \phi_j(x, y) \phi_k + \delta^2 a \nabla \phi_k \sum_{j=1}^{N_{malla}} u_j \phi_j(x, y) \right) dx dy - \delta^2 \int_{T'_N} g \phi_k ds - \int_{\Omega} \phi_k (2u_{i-1} + u_{i-2}) dx dy = 0$$

La matriz de rigidez del elemento finito se puede definir como:

$$k_{kj} = \int_{\Omega} \phi_k \phi_j dx dy + \delta^2 \int_{\Omega} a \nabla \phi_k \nabla \phi_j dx dy$$

$$k \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{N_{malla}} \end{bmatrix} = F \quad \text{sistema de ecuaciones } Ax=b.$$

#### **IV.5 Aplicación del método de combinación de Diferencias Finitas con Elementos Finitos, mediante FREE FEM.**

Una ecuación diferencial parcial es una relación entre una función de varias variables y sus derivadas parciales, cuyos casos de aplicación se encuentran en áreas de la ingeniería, física, matemáticas, etc. Por tanto como ya fue mostrado anteriormente la ecuación diferencial de onda se encuentra dentro de esta categoría, por lo que la propuesta de solución de discretización finito en el tiempo, se resuelve con una discretización de elementos finitos en el espacio. FreeFEM es un software para resolver estas ecuaciones numéricamente. Como su nombre lo indica, es un software gratuito basado en el Método de Elementos Finitos; no es un paquete, es un producto integrado con su propio lenguaje de programación de alto nivel.

Las características de FreeFem son:

Descripción del problema ( valor real o complejo), por sus formulaciones variacionales, con acceso a vectores y matrices.

Sistemas de variables múltiples, ecuaciones múltiples, bi-dimensionales y tridimensionales estáticos o dependientes del tiempo, lineales o no lineales; sin embargo, el usuario debe describir los procedimientos iterativos que reducen el problema a un conjunto de problemas lineales.

Generador automático de mallas, basado en el algoritmo Delaunay-Voronoi; la densidad interna de puntos es proporcional a la densidad de puntos en los límites. Adaptación de malla anisotrópica de base métrica. La métrica se puede calcular automáticamente desde el Hessian de cualquier función FreeFEM.

Múltiples mallas de elementos finitos dentro de una aplicación con interpolación automática de datos en diferentes mallas y posible almacenamiento de las matrices de interpolación.

Se procede a implementar el método de combinación de diferencias finitas hacia atrás con el método de elementos finitos, para la emisión de un pulso de ubicación fija en la superficie de una loseta de hormigón dimensiones de 1.0m x 1.0m x 0.10m, en la que

en su interior se evalúan tres casos de estudio, que corresponden a la existencia de un objeto circular de PVC, un objeto de circular de madera y finalmente un objeto circular de acero, cuya posición se encuentra al centro de la loseta, por lo que mediante la emisión de un pulso de ubicación con una excentricidad respecto al centro de la loseta en la superficie, modela la ilustración del problema directo de la generación del mapa de intensidad de del choque de onda electromagnética con el objeto. A continuación se ilustra el esquema de la sección transversal de la loseta de hormigón analizada.

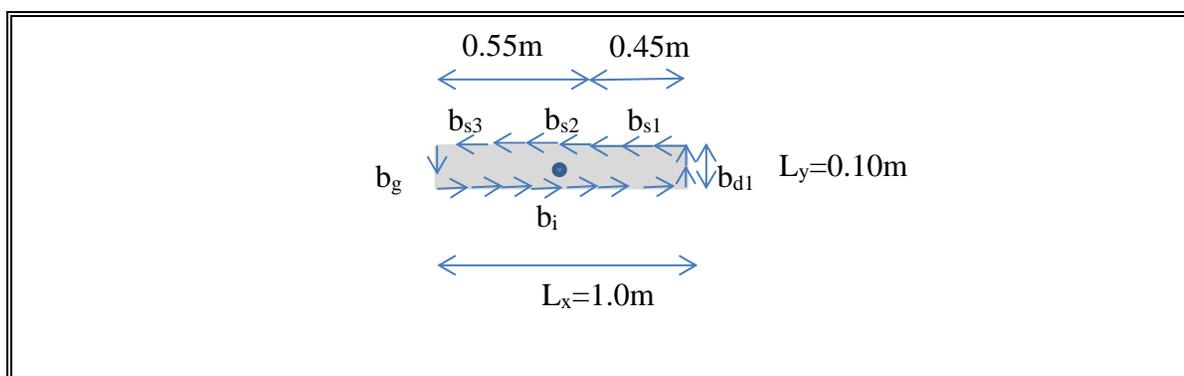


Figura IV-7: Definición de caso de estudio de condiciones de borde.

La figura IV-7, se muestra las condiciones de borde que definen el caso directo de estudio, para una loseta de hormigón, con un objeto circular al centro, delimitado, por las constantes de borde  $b_{d1}$ ,  $b_{s1}$ ,  $b_{s2}$ ,  $b_{s3}$ ,  $b_g$ , y  $b_i$ . y cuyo análisis se realiza en sentido anti-horario, con la finalidad de que la componente normal unitaria apunte hacia afuera de los planos de borde que definen la loseta y se parte del borde derecho  $b_{d1}$ , por lo que la discretización en el tiempo para la emisión del pulso con ubicación fija se define un paso discreto de tiempo el cual para los tres casos de análisis se utiliza un valor de  $0.005\text{s}$ , la excitación se ubica a  $0.45\text{m}$  del borde derecho, es decir  $0.05\text{m}$  desfasada del centro de la sección, mediante las funciones de mallado que posee el programa FreeFem, y en base a la paso del tiempo se genera una malla de polinomios de grado 2, que discretiza el espacio confinado por los bordes que definen la sección de la loseta tal como se ilustra a continuación:

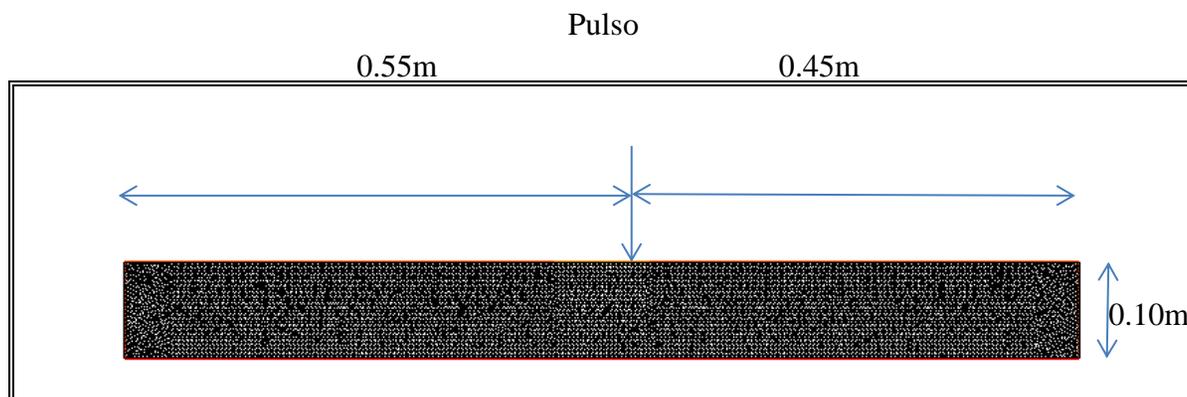


Figura IV-7: Generación de mallado en sección de loseta.

Discretizado el espacio de análisis se procede a ejecutar la rutina de cálculo elaborada en FreeFem y que se muestra su desarrollo en la en Anexo A para el caso de simulación directa del objeto de PVC ubicado al centro de la loseta. Para la cual se definió una constante dieléctrica alfa para el hormigón de 5.0 y para el PVC de un valor de beta igual a 3.4 la cual es menor a la del hormigon, con lo que se obtiene la siguiente ilustración de simulación de propagación de onda electromagnética en el medio discretizado por elementos finitos debido a la emisión de un pulso con excentricidad de 0.05m del centro.

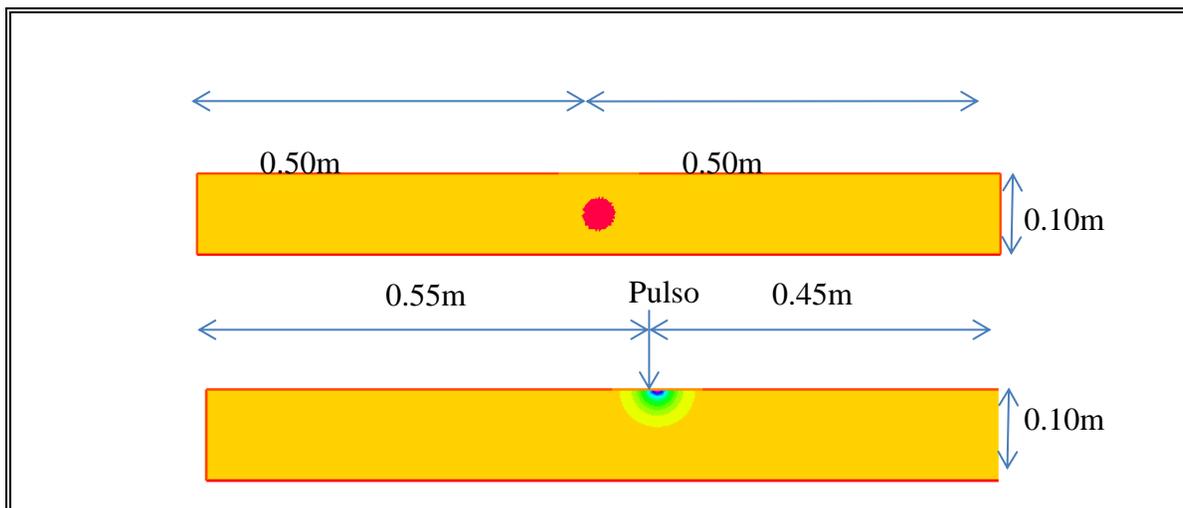


Figura IV-8: Simulación de emisión de pulso con excentricidad para detección de objeto circular de PVC.

De la figura se aprecia la variación de intensidad debido al choque de la onda con el objeto con lo cual se ilustra que el modelo refleja la existencia de un objeto debido a la diferencia dieléctrica que existe entre el objeto y en el medio en el cual se encuentra embebido, por lo que la discretización de las diferencias finitas en el tiempo llevadas a la discretización de elementos finitos en el espacio resulta una manera propicia para la modelación numérica de la propagación de onda electromagnética.

Siguiendo con la aplicación del método de solución de la ecuación diferencial de onda mediante la combinación de la técnica de diferencias finitas del tiempo hacia atrás junto con elementos finitos en el espacio confinado por las condiciones de borde se procede a mostrar el resultado del mapa de intensidad de propagación de onda para el caso de un objeto de madera embebido en la loseta de hormigón por lo que la constante dieléctrica beta en este caso se define de 6.0, el cual es mayor a la del hormigón, las condiciones de borde se mantienen igual al caso anterior así como la discretización en el tiempo y en el espacio. A continuación se muestra el resultado de la modelación numérica de la propagación de onda.

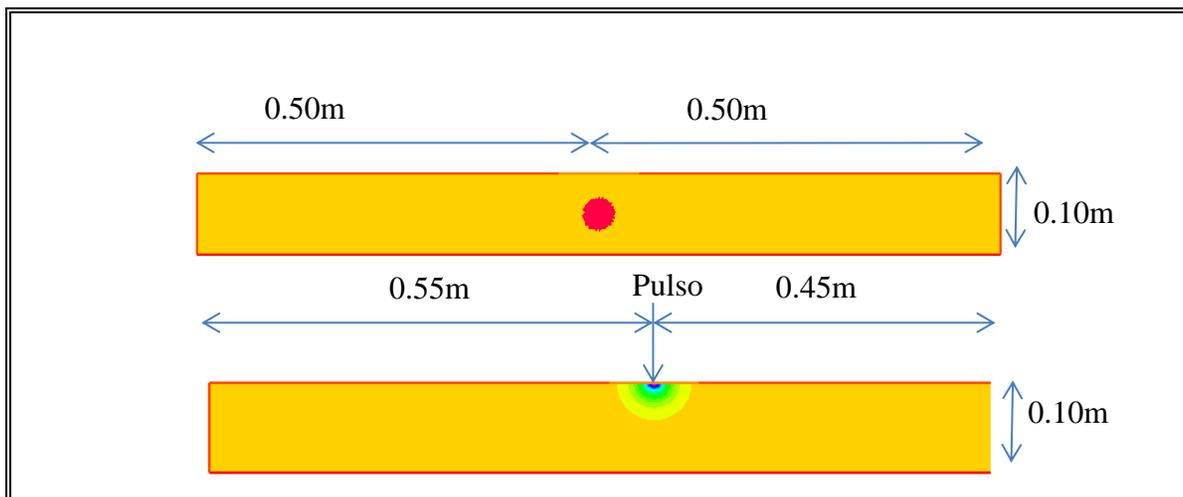


Figura IV-9: Simulación de emisión de pulso con excentricidad para detección de objeto circular de madera.

De la figura IV.9, se aprecia el mapa de isolineas que marcan la intensidad de la propagación de onda al chocar con el objeto el cual tiene mucha similitud a la obtenida para el caso del objeto de circular de PVC, debido a que las constantes dieléctricas son de valores muy cercanos al valor que posee el hormigón, se aprecia en el mapa de distribución de colores un amarillo más intenso al que compone el medio en el que se propaga la onda en este caso al del hormigón.

Finalmente se presenta el resultado de modelación numérica para el caso de un objeto circular de acero embebido en la loseta de hormigón, para esta modelación se define una constante dieléctrica para el acero de valor de 10000, pues el acero tiene una alta permeabilidad y conductividad eléctrica, por lo que su valor está muy por encima del valor de constante dieléctrica en el hormigón. Al tener una mayor constante dieléctrica el objeto de acero, debe presentar en el mapa de distribución una mayor intensidad y definición de la propagación en relación a los obtenidos en los dos casos anteriores en los cuales la constante dieléctrica del objeto es similar a la del hormigón. A continuación se ilustra la simulación de propagación en la interacción del objeto de acero embebido en el hormigón.

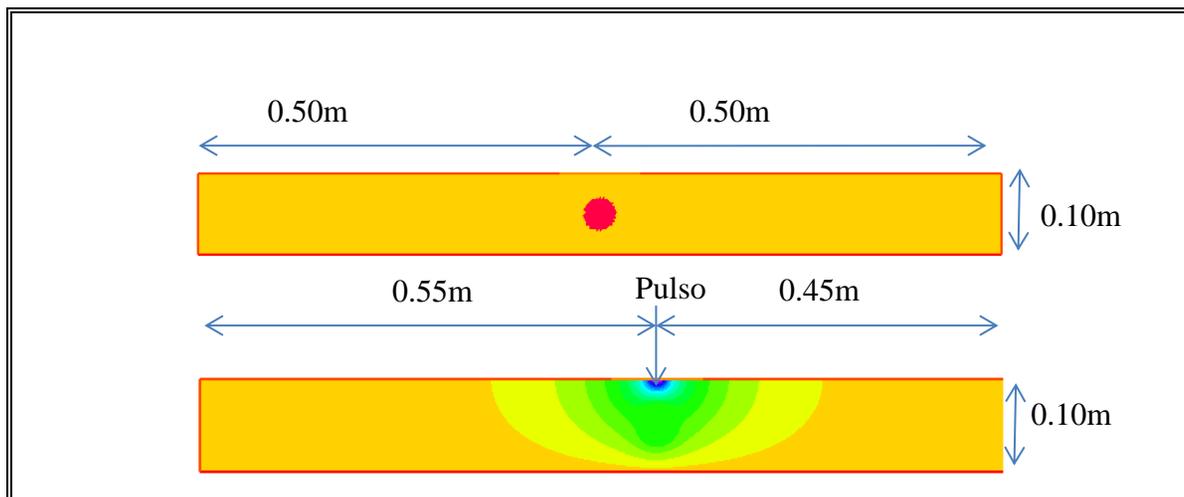


Figura IV-10: Simulación de emisión de pulso con excentricidad para detección de objeto circular de acero.

Al observar la figura IV-10 el resultado gráfico, queda en evidencia que el objeto de acero embebido en el hormigón, al tener una mayor constante dieléctrica, define con mayor intensidad el campo de propagación de la onda, al encontrarse con el objeto, por lo que la modelación numérica mediante el uso de diferencias finitas implícitas en el tiempo combinadas con elementos finitos en el espacio al nivel que se ha presentado en este documento y en la forma de resolución del problema directo se comprueba que resulta ser un método que permite resolver de manera correcta la ecuación diferencial de segundo orden de propagación de onda, por tanto es una herramienta de modelación de mucho potencial para resolver la ecuación diferencial de Maxwell como método alternativo al FDTD.

Los ejemplificaciones mostradas en el presente capítulo son de carácter ilustrativo, para la aplicación del método de manera simplificada y en cierta forma trivial, ya que esta fuera del alcance del presente estudio profundizar más en el tema, pues no se han considerado en el desarrollo del algoritmo una completa compatibilización con el fenómeno físico que acontece en la propagación de la onda electromagnética, al viajar en el espacio, tales como los efectos de reflexión y refracción, la velocidad de propagación y los tiempos reales de viaje en un medio heterogéneo, pero resulta de ayuda la comprensión del modelamiento teórico sobre la propagación de onda, en

este caso la onda electromagnética definida por la ecuación de Maxwell, cuyos principios físicos han sido aplicados en el uso del georadar, para la realización de ensayos no destructivos

## V. CONCLUSIONES.

En este documento se ha presentado una metodología, para la realización de ensayos no destructivos mediante el uso de Georadar, aplicado en losetas de hormigón y muros de mampostería de bloque de hormigón reforzado, junto con una metodología de procesamiento de los datos medidos, para la generación de imágenes que ilustran la estructura interna de la presencia de objetos embebidos en un medio heterogéneo con constante dieléctrica diferente.

El procedimiento desarrollado y presentado en este documento, se ilustra esquemáticamente en dos fases correspondientes a la de preparación, de los datos y la del procesado en sí mismo. En la preparación de los datos, se corrigen los errores de medición, tales como la eliminación de las trazas ruidosas, interpolación de las trazas, reubicación de las mismas, etc. En el procesado por su parte, se realiza una secuencia de pasos, que intercala una serie de filtros y ganancias, que facilitan una correcta deconvolución y su posterior migración. El correcto procesado es, además, la garantía de una fuente de datos medidos fiables, que ilustran y representan las condiciones reales de la composición de la muestra medida, permitiendo obtener un conocimiento de la existencia de objetos, ubicación, incluso hasta la forma.

Al término del estudio realizado es posible concluir que se ha demostrado la efectividad del GPR en estructuras de hormigón, confirmando que es un método que posibilita la detección y visualización de la estructura interna de este material, que posee características propias que hacen favorable y muy viable su utilización como un método de prospección no destructivo. Con este método se pueden hacer evaluaciones del estado de un determinado bloque de hormigón de manera rápida y efectiva.

Las condiciones generales, que determinan los resultados del GPR, fueron similares en casi todos los experimentos realizados. Sin embargo, diferencias entre sus

características físicas influyen en sus propiedades eléctricas, generando variación en la respuesta de la onda electromagnética.

En los ensayos realizados en los muros de bloque de hormigón armado, se obtuvieron imágenes claras de la composición de su estructura interna, al apreciarse los vacíos que existen en las celdas de los bloques que no son rellenos con grout, adicionalmente se evidencia el ingreso de grout en las celdas próximas a la junta de unión de hiladas horizontales de bloques de hormigón, por lo que se identifica la existencia de un material denso irrumpiendo en el vacío, de esta forma se puede usar como control de calidad, para determinar la uniformidad de relleno en las zonas donde se coloca barra de acero como refuerzo vertical, de manera de corroborar y garantizar el confinamiento del grout endurecido una vez finalizado su proceso de fraguado. Adicionalmente se pudo observar con buena resolución la formación de hipérbolas debido a la existencia del refuerzo horizontal colocado en la junta de unión de hiladas de bloques de hormigón, lo que permite identificar la forma y ubicación de las barras de acero, corroborando el espaciamiento definido en los planos del detallado para la construcción; se sugiere acciones de mejora en la adquisición de datos y validación a través de modelación numérica, para futuras investigaciones en este campo cuyos resultados preliminares son satisfactorios.

Finalmente se incursionó en el estudio de la modelación numérica para la resolución del problema directo de la propagación de onda, ello conlleva a la generación de modelos que simulan el fenómeno físico medido con el GPR, el estudio se limitó a las generalidades de la propuesta de implementación del método basado en Diferencias Finitas implícitas en el tiempo combinado con Elementos Finitos en el espacio, de lo cual se concluye que es un método con mucho potencial en la modelación de la propagación de onda, al ser un método que se encuentra en desarrollo y en estudio y cuyo alcance está fuera del presente documento, en la aplicación que se detalló y simuló quedó evidenciada la efectividad y la capacidad que posee la combinación de ambos métodos numéricos para la resolución de la ecuación diferencial de onda.

## BIBLIOGRAFIA

ACI 228.2R, *Nondestructive Test Method for Evaluation of Concrete in Structure*. ACI Manual of Concrete Practice, Part 2, Construction Practices and Inspection Pavements, ACI, International.

ASTM D4748. *Standard Test Method for Determinating the Thickness of Bound Pavement Layers Using Short Pulse Radar*, Book of Standards Volume 04.09, ASTM, International.

ASTM D6432. *Standard Guide for Using the Surface Ground Penetrating Radar Method for Subsurface Investigation*, Book of Standards Volume 04.09, ASTM, International.

BUSQUET, E.; CASAS, A.; PINTO V.; RIVERO, L.; SABADIA, J. B.; (1996) *Geofísica Ambiental: Técnicas no Destructivas para el Reconocimiento de Zonas Contaminadas por Vertidos*, Acta Geológica Hispánica, Vol.30 (n.1-3). pp. 73-82, España.

CAPOZZOLI, L., GIAMPAOLO, V., VOTTA, M & RIZZO, E.; (2014). *Ground Penetrating Radar Data Analyzed in Frequency and Time Domain for Engineering Issues*, Geophysical Research Abstracts, Vol.16, EGU, Italia.

DANIELS, D.J.; (2004); *Ground Penetrating Radar (Vol.1) Iet*.

GOTTSHE, F.; (1997); *Idetification of Cavities by Extration of Characteristic Parameters from Ground Probing Radar Reflection Data*, PhD Thesis, Christian-Albrechts Universitat, zu Kiel, Alemania.

GUTIERREZ, J.M.; (2004); *Analisis del Subsuelo Utilizando Tecinas Geofisica*. Sistema Georadar RAMAC/GPR, pp.87-88. Colegio Oficial de Ingenieros Tecnicos en Topografia de Madrid, España.

HARMUTH, H.; (2007); *Radiation of Nonsinusoidal Electromagnetic Wave, Advance in Electronics & Electron Physics*, USA.

JELF, R.; (2007); *Application of Ground Penetrating Radar to Civil and Geotchnical Engineering*. Electromagnetic Phenomena, pp.103-117, USA.

JOL, H.M.; (2008); *Ground Penetrating Radar Theory and Applications*, Elsevier.

OLHOEFT, G.R.; (2006); *Maximizing the Information Return form Ground Penetrating Radar*, Journal of Applied Geophysics, pp.175-187, USA.

PEREZ, VEGA; (2001); *Radar del Subsuelo, Evaluación para Aplicaciones en Arqueología y en Patrimonio Histórico Artístico*, Universidad Politécnica de Cataluña, España.

SALUCCI, M.; (2014); *Civil Engineering Applications of Ground Penetrating Radar Recent Advances*, Eledia Research Center, Geophysical Research Abstracts, Volume 6 pp.2, USA.

TAVERA, M.; PEREZ, R.; MONTALVO I., LOPEZ, A.; (2008) *Métodos no Destructivos Para la Mejora del Rendimiento de un Red Hidráulica: Caso de Estudio con el Georadar*, Alteracoes Climaticas e Gestao de Agua e Energia em Sistemas de Abastecimento e Drenagem, pp.219-299, España.

THIEL, W.; *Some Aspects of Stability and Numerical Dissipation of the Finite Difference Time Domain (FDTD), Technique Including Passive and Active Lumped Element*, IEEE Transactions Microwave Theory Tech, vol. 50, no.9, pp 2159-2165, Sep, 2002. USA.

YEE, K.S.; *Numerical Solution of Initial Boundary Value Problems Involving Maxwell's Equation in Isotropic Media*, IEEE Transactions on Antenna and Propagation, vol. 14, pp 302-303, May, 1966.

**ANEXOS**

**ANEXO A : RUTINA DE CALCULO EN FREEFEM PARA PROPAGACION  
DIRECTA DE ONDA EN UN MEDIO HOMOGENEO.**

```

string sauve  ="PbInvConduct"; // Nom du fichier de sauvegarde
ofstream ErrGamma(sauve+".ErrGamma.data");
ofstream ErrOmega(sauve+".ErrOmega.data");
ofstream FObj(sauve+".fobj.data");
ofstream objetivo("objetivo.txt");
ofstream psi("psi.txt");
ofstream fraccion("fraccion.txt");

real pi      = 4*atan(1) ;
int  niter   = 100;      // Nombre d'iterations
int  trueiter = niter;   // vrai nombre d'iterations faites
int  iter    = 0;       // conteur d'iterations
int  falseiter = 0;     // Para poner nombre a las imagenes
int  npen    = 100000;  // Debut des iterations avec penalisation
int  n       = 25;      // Taille du maillage
real lagrange = 1.0;    // Multiplicateur de Lagrange pour le volume
real varlagrange=10.0;
real cc,ss;
real mov     = 0.01;    // Longueur de pass initial pour l'optimisation
real tolremont = 0.00; // tolerance pour remonter
real normgrad = 0.0;
int  inic=0;
real calgrad=1.0;

func f0=100.0*(x>0.495)*(x<0.505);/*sin(1.*pi*x)*(x>-0.45)*(x<10.55); //excitation au
bord superieur
////////////////////
// Parámetros de tiempo //
////////////////////

real dt = 0.05;
int  nt = 8;
int  ndisc=nt+1;
real T = nt*dt;
real urho = 1;

func uinic = 0;
func upinic = 0;

real lagmin, lagmax ;           // Encadrement du multiplicateur de Lagrange

```

```

int inddico ;
real obj,oldobj; // Valores func. objetivo
real oldcompliance,newcompliance; // Valeurs de la fonction objectif
real ordre0; // Valeur de la fonction objectif a l'ordre 0

real ordre1,ordre2,ordre20,ordre21;

int pt = 2; // Potencia de j(u)

real volume,volume1; //
string legende; // Legende pour les sorties graphiques
string titulograf;

real[int] fobj(niter);
real[int] ErrorGamma(niter);
real[int] ErrorOmega(niter);

real[int] vviso(21);
for (int i=0;i<21;i++)
    vviso[i]= 10*i;

int NumIterVol = 0; // Numero de iteraciones de Volumen
int k;

real[int] vviso2(21);
for (int i=0;i<21;i++){
    vviso2[i]= i*5.0e-2;
};

//////////
// Conduction des deux phases //
//////////
real alpha = 5.0;
real beta = 100000.0;
real eta = (beta-alpha)/alpha;
real damas=beta-alpha;

//////////
// Definition du domaine //
//////////

real Lx = 1.0;
real Ly = 0.10;

```

```

border bd1(t=0,Ly) { x=Lx; y=t; label=2; }; // bord droit de la forme
border bs1(t=Lx,0.55*Lx) { x=t; y=Ly; label=2; };
border bs2(t=0.55*Lx,0.45*Lx) { x=t; y=Ly; label=3; };
border bs3(t=0.45*Lx,0) { x=t; y=Ly; label=2; };
//border bg1(t=Lx,0.1*Lx) { x=0; y=t; label=2; };
border bg(t=Lx,0) { x=0; y=t; label=2; };
border bi(t=0,Lx) { x=t; y=0; label=1; };
//border bi2(t=0.1*Lx,Lx) { x=t; y=0; label=1; };

//////////
// Construction du maillage //
//////////
//mesh Th = buildmesh (bd1(4*n)+bd2+bs(1*n)+ bg(4*n) +bi(4*n));
mesh Th = buildmesh (bd1(1*n)+bs1(5*n)+bs2(1*n)+bs3(5*n)+bg(1*n)+bi(10*n));

plot(Th, wait=1);

savemesh(Th,sauve+".msh");

fespace Vh0(Th,P0); //Definition de l'espace P0
fespace Vh2(Th,P2); //Definition de l'espace P2
//////////
// Espacios de funciones auxiliares para la resolución de los problemas //
//////////

Vh2 v,u,p,A11,A12,A22;
Vh0 theta,thetb,thetbure,thetb,multhetb,amas,amenos,damenos;
Vh0 W11,W12,W21,W22,E1,E2,Q1,Q2,grJ,grJprop;
real a,b,c,lam1,lam2,w1,w2,t1;
Vh0 rho,chi0;
Vh2 ureal,u0,p0,p00;
Vh2 M1,M2,M3;
Vh2 u00, u10, ureal0, ureal00, p0i, p1i; // Condiciones del paso anterior
// Agregamos además velocidades para ur, u0, u1, p0 y p1:
Vh2 upreal, up0, up1, pp0, pp1;
Vh2 gx, gy, gx0, gy0;

//////////
// Normalisation du volume //
//////////

// Ubicaremos el material entre x = [L0x,L1x] e y = [L0y,L1y]
// (se agrega o quita 0.1 en los extremos que tocan el borde!)
real L0x = Lx*0.45;
real L1x = Lx*0.55;
real L0y = Ly*0.4;

```

```

real L1y = Ly*0.6;

func ubeta = ((x-0.50)^2+(y-0.05)^2<=0.0004);//+((x-0.50)^2+(y-0.05)^2<=0.0004);

func rig = alpha*(1.0 + eta*ubeta);

real volume0 = int2d(Th)(1.0*ubeta);

func ubetaadiv = ((x-0.20)^2+(y-0.05)^2<=0.0004);//+((x-0.50)^2+(y-0.05)^2<=0.0004);

func rigadiv = alpha*(1.0 + eta*ubetaadiv);
thetb=ubetaadiv;/*prueba11/volumeprueba;
thetbsure = thetb;

real psithet;
chi0 = ubeta;
real xg, yg;
xg = int2d(Th)(chi0*x)/int2d(Th)(chi0);
yg = int2d(Th)(chi0*y)/int2d(Th)(chi0);

cout<<"Centro de masa de inclusion"<<xg<<endl;
cout<<"Centro de masa de inclusion"<<yg<<endl;

E1 = ubeta;//cond;
legende = "Distribucion real de conductividades";
if (eta>0)
    legende = legende+ " (mayor en donde hay 'beta')";
else
    legende = legende+ " (mayor en donde hay 'alpha')";

legende = legende+" . Volumen = "+volume0;
plot(Th,E1,fill=1,wait=1,cmm=legende,greyscale=0,ps="Beta.eps");

////////////////////////////////////
// Inititalisation //
////////////////////////////////////

//func prueba11 = (x>0.77)*(x<0.87)*(y>0.3)*(y<0.7);
//real volumeprueba = int2d(Th)(prueba11);

////////////////////////////////////
// Definition du systeme //
////////////////////////////////////

```

```
// Independiente del número de pasos de tiempo, consideraremos la fuente como una
// excitación en el primer paso de tiempo
// y posteriormente dejaremos oscilando libremente al sistema.
```

```
Vh2 fa;
```

```
real delta = 0.5;
```

```
// Resolución de problemas utilizando delta-esquema:
```

```
// real problem
```

```
problem realconduc(ureal,v,init=inic) =
  int2d(Th)(ureal*v)+ int2d(Th)(dt^2*rig*(dx(ureal)*dx(v)+dy(ureal)*dy(v)))
  - int2d(Th)((2.0*ureal0-ureal00)*v)
  - int1d(Th,3)(dt^2*fa*v)
  + on(1,ureal=0)
// + on(2,ureal=0)
;
```

```
problem conduc(u,v,init=inic) =
  int2d(Th)(u*v)+
  int2d(Th)(dt^2*(A11*dx(u)*dx(v)+A22*dy(u)*dy(v)+A12*(dx(u)*dy(v)+dy(u)*dx(v))))
  - int2d(Th)((2.0*u0-u00)*v)
  - int1d(Th,3)(dt^2*fa*v)
  + on(1,u=0)
// + on(2,ureal=0)
;
```

```
problem adjunto(p,v,init=inic) =
  int2d(Th)(p*v)+
  int2d(Th)(dt^2*(A11*dx(p)*dx(v)+A22*dy(p)*dy(v)+A12*(dx(p)*dy(v)+dy(p)*dx(v))))
  - int2d(Th)((2.0*p0-p00)*v)
  - int1d(Th,3)(dt^2*2.0*(u0-ureal0)*v) //revertir tiempo de u y ureal
  + on(1,p=0)
;
```

```
////////////////////////////////////
// Creamos matrices de almacenamiento //
////////////////////////////////////
```

```
int nspace = ureal[.].n;
real[int,int] saveur(nspace,nt+1);
real[int,int] saveu(nspace,nt+1);
real[int,int] saveu1(nspace,nt+1);
```

```

real[int,int] savep(nspace,nt+1);
//real[int,int] savep1(nspace,nt+1);
//real[int,int] saveup1(nspace,nt+1);

////////////////////////////////////
// Resolución del problema real //
////////////////////////////////////
ureal0=0.0; ureal00=0.0;
//fa=f0*(x<Lx/ndisc);
fa=f0;//*(x>(0.45*Lx))*(x<(0.55*Lx));
for(int j=0; j<nt+1; j+=1){
realconduc;
inic=1;

plot(Th,ureal,fill=1,wait=1,cmm="ureal j="+j,value=1);
for(int i=0; i<ureal[].n; i+=1){
  saveur(i,j) = ureal[][i];
};
ureal00=ureal0;
ureal0=ureal;
// fa=f0*(x>(j+1)*Lx/ndisc)*(x<(j+2)*Lx/ndisc);
};

////////////////////////////////////
// Compliance initiale //
////////////////////////////////////
// "part" indica la proporción de material B en la posición correcta
real part=int2d(Th)(thetb*ubeta)/int2d(Th)(ubeta);
fraccion<<part<<endl;

////////////////////////////////////
// Calculo parámetro psithet inicial //
////////////////////////////////////

real xr1 = 0.85;
real xr2 = 0.95;
real yr1 = 0.3;
real yr2 = 0.7;
rho = (x<xr1)*(y<yr2)*(y>yr1)*(xr1-x) + (x<xr2)*(y>yr2)*(x>xr1)*(y-yr2) +
(x<xr2)*(y<yr1)*(x>xr1)*(yr1-y) + (x>xr2)*(y<yr2)*(y>yr1)*(x-xr2)
+ (x<xr1)*(y>yr2)*sqrt((x-xr1)^2+(y-yr2)^2) + (x<xr1)*(y<yr2)*sqrt((x-xr1)^2+(y-yr1)^2)+
(x>xr1)*(y>yr2)*sqrt((x-xr2)^2+(y-yr2)^2)
+ (x>xr2)*(y<yr1)*sqrt((x-xr1)^2+(y-yr1)^2);

```

```

psithet = (int2d(Th)((1+rho)*(1-chi0)*thetb)+int2d(Th)((1-
thetb)*(chi0)))/(int2d(Th)((1+rho)*(1-chi0))+int2d(Th)((chi0)));

//cout <<"Psi = "<<psithet<<endl;
psi<<psithet<<endl;

////////////////////////////////////
// Resolución del problema directo //
////////////////////////////////////
//A11=rigadiv;//
//A12=0.0;
//A22=rigadiv;//
amas=thetb*beta+(1.0-thetb)*alpha;
amenos=alpha*beta/(thetb*alpha+(1.0-thetb)*beta);
damenos=damas*amenos^2/(alpha*beta);
A11=amas;
A22=amenos;
A12=0.0;
inic=0;
u0=0.0; u00=0.0; //fa=f0*(x<Lx/ndisc);
for(int j=0; j<nt+1; j+=1){
    conduc;
    inic=1;
    // plot(Th,u,fill=1,wait=1,cmm="u j="+j,value=1);
    for(int i=0; i<u[.n]; i+=1){
        saveu(i,j) = u[[i];
    };
    u00=u0;
    u0=u;
    // fa=0.0;
    // fa=f0*(x>j*Lx/ndisc)*(x<(j+1)*Lx/ndisc);

```