



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA

MODELACIÓN DE RÓTULAS PLÁSTICAS EN ELEMENTOS VIGA-COLUMNA DE SAP2000

XABIER ARBURO CONSTANZO

Informe de Actividad de Graduación para optar al Grado de
Magíster en Ingeniería Estructural y Geotécnica

Profesor Supervisor:
MATÍAS HUBE GINESTAR

Santiago de Chile, Julio, 2023.

(A mi familia, gracias por su apoyo)

INDICE GENERAL Pág.

INDICE DE TABLAS.....	iv
INDICE DE FIGURAS.....	vii
RESUMEN.....	ix
I INTRODUCCION.....	1
II MODELO VIGA-COLUMNA CON PLASTICIDAD CONCENTRADA.....	3
II.1 Elemento Viga-Columna.....	3
II.2 Plasticidad Concentrada.....	5
II.3 Análisis No Lineal -Calculo Analítico.....	8
III ANALISIS NO LINEAL ELEMENTO VIGA-COLUMNA - SIN CARGA AXIAL..	11
III.1 Calculo Analítico.....	11
III.2 Comprobación SAP2000.....	15
IV ANALISIS NO LINEAL ELEMENTO VIGA-COLUMNA -CON CARGA AXIAL	21
IV.1 Calculo Analítico.....	21
IV.2 Comprobación SAP2000.....	28
CONCLUSIONES.....	46
BIBLIOGRAFIA.....	48
Anexo A : DIAGRAMA DE INTERACCION.....	49
Anexo B : METODO ITERATIVO: CALCULO DE GIROS (P=0 tonf y M=10500 tonf- cm).....	54

INDICE DE TABLAS

	Pág.
Tabla III.1: Geometría Elemento y Propiedades Sección.....	12
Tabla III.2: Parámetros Rotulas Plásticas.....	12
Tabla III.4: Deformaciones impuesta en los extremos del elemento.....	13
Tabla III.5: Calculo Analítico: Determinación Fuerzas Básicas.....	14
Tabla III.6: Resultados: Giros Totales en rotulas elemento viga-columna.....	19
Tabla III.7: Resultados: Momentos y Giros Plásticos, en rotula - Modelo SAP2000.....	19
Tabla III.8: Resultados: Momentos y Giros Plásticos, en rotula- Calculo Analítico.....	19
Tabla III.9: Comparación: Rotaciones plásticas – SAP2000 vs Calculo Analítico.....	20
Tabla IV.1: Geometría Elemento y Propiedades Sección.....	23
Tabla IV.2: Parámetros Material.....	23
Tabla IV.3: Cargas Axiales y Momentos de Fluencia Analizados.....	24
Tabla IV.4: Matriz de Flexibilidad elemento Viga-Columna.....	25
Tabla IV.5: Calculo - giros totales para $q_i = \{10500 ; 0\}$ [tonf-cm] y $P=0$ [tonf].....	26
Tabla IV.6: Calculo - giros totales para $q_i = \{10490 ; -5\}$ [tonf-cm] y $P=0$ [tonf].....	27
Tabla IV.7: Calculo - giros totales para $q_i = \{10510 ; 5\}$ [tonf-cm] y $P=0$ [tonf].....	27
Tabla IV.8: Resumen giros totales para $\Delta M = \{-100; -10; 10; 20; 30; 100; 200; 400; 600; 900\}$, $M_y = 10500.00$ [tonf-cm], $P=0$ [tonf].....	28
Tabla IV.19: Resumen Curvas Normalizadas Momento -Rotación.....	29

Tabla IV.10: SAP2000: Resumen Diagrama Iteración Normalizada.....	31
Tabla IV.11: SAP2000: Giros totales , $M_y = 10500.00$ [tonf-cm], $P=0$ [tonf].....	32
Tabla IV.12: SAP2000: Giros plásticos , $M_y = 10500.00$ [tonf-cm], $P=0$ [tonf].....	32
Tabla IV.13: Calculo Analítico vs SAP2000: Resumen de momentos y giros, $M_y = 10500.00$ [tonf-cm], $P=0$ [tonf].....	33
Tabla IV.14: Calculo Analítico vs SAP2000: Resumen de momentos y giros, $M_y = 10171.87$ [tonf-cm], $P=50$ [tonf].....	35
Tabla IV.15: Calculo Analítico vs SAP2000: Resumen de momentos y giros, $M_y = 9843,75$ [tonf-cm], $P=100$ [tonf].....	35
Tabla IV.16: Calculo Analítico vs SAP2000: Resumen de momentos y giros, $M_y = 9515,62$ [tonf-cm], $P=150$ [tonf].....	36
Tabla IV.17: Calculo Analítico vs SAP2000: Resumen de momentos y giros, $M_y = 9187,50$ [tonf-cm], $P=200$ [tonf].....	36
Tabla IV.18: Calculo Analítico vs SAP2000: Resumen de momentos y giros , $M_y = 8859,37$ [tonf-cm], $P=250$ [tonf].....	37
Tabla IV.19: Calculo Analítico vs SAP2000: Resumen de momentos y giros, $M_y = 8531,25$ [tonf-cm], $P=300$ [tonf].....	37
Tabla IV.19: Rigidez y Fluencia equivalente, $M_y = 10500.00$ [tonf-cm], $P=0$ [tonf].....	40
Tabla IV.20: Rigidez y Fluencia equivalente, $M_y = 10171.87$ [tonf-cm], $P=50$ [tonf].....	41
Tabla IV.21: Rigidez y Fluencia equivalente, $M_y = 9843,75$ [tonf-cm], $P=100$ [tonf].....	41
Tabla IV.22: Rigidez y Fluencia equivalente, $M_y = 9515,62$ [tonf-cm], $P=150$ [tonf].....	41
Tabla IV.23: Rigidez y Fluencia equivalente, $M_y = 9187,50$ [tonf-cm], $P=200$ [tonf].....	42

Tabla IV.24: Rigidez y Fluencia equivalente, $M_y=8859,37$ [tonf-cm], $P=250$ [tonf].....	42
Tabla IV.25: Rigidez y Fluencia equivalente, $M_y=8531,25$ [tonf-cm], $P=300$ [tonf].....	42
Tabla IV.26: Resultados SAP2000: Análisis paramento η	43
Tabla IV.27: Cargas Ajustadas Diagrama Interacción.....	45

INDICE DE FIGURAS

	Pág.
Figura II.1: Elemento Viga-Columna: Grados de libertad.....	3
Figura II.2: Elemento Viga-Columna : Representación Plasticidad Concentrada.....	5
Figura II.3: Plasticidad Concentrada - Diagrama Interacción Momento-Rotación.....	6
Figura II.4: Viga-Columna con Plasticidad Concentrada: Deformada.....	6
Figura II.5: Viga-Columna con Plasticidad Concentrada: Diagrama Deformación-Carga..	8
Figura III.1: SAP2000 Rotulas Plástica: Definición Relación Momento - Rotación.....	17
Figura III.2: SAP2000 Rotulas Plástica: Ubicación.....	17
Figura III.3: SAP2000 Elemento Viga-Columna : Vista general.....	18
Figura III.4: SAP2000 Elemento Viga-Columna: Deformada.....	18
Figura IV.1: Relación Momento – Rotación : Elemento con carga Axial.....	21
Figura IV.2: Diagrama Interacción Carga Axial -Momento.....	22
Figura IV.3: Diagrama de Interacción Sección 20cmx40cm.....	24
Figura IV.4: SAP2000: Definición Curva Momento -Rotación $P=0$ [tonf].....	30
Figura IV.5: SAP2000: Definición Diagrama Iteración -Carga Axial vs Momento.....	30
Figura IV.6: SAP2000: Cargas aplicadas modelo elemento viga-columna, $P=300$ [tonf].	31
Figura IV.7: Momentos vs Giros , $P=0$ [tonf] y $M_y=10500.00$ [tonf-cm].....	34
Figura IV.8: Calculo Analítico vs SAP2000: Momentos vs Giros, $P=50$ [tonf] y $M_y=10171.87$ [tonf-cm].....	38

Figura IV.9: Calculo Analítico vs SAP2000: $P=100$ [tonf] y $M_y=9843,75$ [tonf-cm].....	38
Figura IV.10: Calculo Analítico vs SAP2000: $P=150$ [tonf] y $M_y=9515,62$ [tonf-cm].....	39
Figura IV.11: Calculo Analítico vs SAP2000: $P=200$ [tonf] y $M_y=9187,50$ [tonf-cm].....	39
Figura IV.12: Calculo Analítico vs SAP2000: $P=250$ [tonf] y $M_y=8859,37$ [tonf-cm].....	39
Figura IV.13: Calculo Analítico vs SAP2000: $P=300$ [tonf] y $M_y=8531,25$ [tonf-cm].....	40
Figura IV.14: SAP2000: Relación entre η^* y Carga Axial.....	44
Figura IV.15: Trayectoria Diagrama de Interacción.....	44
Figura A.1: Deformaciones fibras sección Transversal.....	52
Figura A.2: Diagrama de Interacción Sección 20x40cm.....	52
Figura A.3: Diagrama de Interacción Normalizado Sección 20x40cm.....	53

RESUMEN

En este trabajo se aborda el análisis del elemento tipo viga-columna con plasticidad concentrada, mediante la aplicación de un procedimiento calculo analítico y la utilización de software de análisis no lineal SAP2000. La implementación mediante análisis matricial, permitirá validar los resultados obtenidos en elementos con rótulas concentradas de SAP2000. Adicionalmente se revisa el comportamiento de las rotulas para distintos niveles de carga axial. A partir del análisis numérico realizado a las trayectorias de los giros plásticos y elásticos en los extremos del elemento viga-columna, obtenidas en los modelos realizados en SAP2000, se estimaron parámetros equivalentes de momento de fluencia, rigidez y parámetro η^* ajustado, para distintos niveles de carga axial. Esto permitió contrastar los resultados obtenidos por calculo analítico, identificando parámetros relevantes que influyen en el comportamiento no lineal de elementos con plasticidad concentrada sometidos a cargas axial.

I INTRODUCCION

Cuando el principio de superposición no permite determinar directamente los esfuerzos y desplazamientos de una estructura, es necesario incorporar al análisis los conceptos de no-linealidad (del material y/o geométricos), que permiten mediante procedimientos incrementales e iterativos, alcanzar el equilibrio de fuerzas y el cálculo de desplazamientos en la estructura.

En este trabajo se aborda la no linealidad del material, mediante la definición de relaciones entre esfuerzos internos y deformaciones. Estas relaciones definen un régimen elástico hasta cierto nivel de carga, en cual los resultados son idénticos a los obtenidos por modelos lineales. Superado ese nivel de carga el comportamiento es no lineal y se produce un cambio de rigidez del elemento. El objetivo de este trabajo es implementar un elemento viga-columna con resortes en los extremos que permite realizar análisis no lineal a flexión del elemento. Mediante análisis matricial, se validarán los resultados obtenidos en elementos con rótulas concentradas de SAP2000. Adicionalmente se revisa el comportamiento de las rótulas para distintos niveles de carga axial, analizando los resultados de modelos desarrollados en SAP2000. El Capítulo II de este documento presenta la metodología que permite resolver el problema no lineal, mediante equilibrio estático de la barra y la evaluación del comportamiento plástico de las rótulas en sus extremos, se definen las ecuaciones que permiten conformar el algoritmo de resolución por iteraciones. En el Capítulo III mediante la aplicación directa del algoritmo iterativo, se analiza el elemento viga-columna con plasticidad concentrada, sometido a flexión pura. Los resultados obtenidos se contrastan con modelos equivalentes desarrollados en el software de análisis estructural no lineal SAP2000. En el Capítulo IV se realiza el análisis incorporando carga axial en conjunto con el momento de flexión. Utilizando modelos desarrollados en SAP2000 se evaluará el comportamiento de las rótulas plásticas para distintos niveles de carga axial. Los giros plásticos en las rótulas son comparados con los resultados obtenidos mediante la aplicación del procedimiento analítico iterativo.

II MODELO VIGA-COLUMNA CON PLASTICIDAD CONCENTRADA

Un elemento tipo viga-columna con plasticidad concentrada consiste en una barra (viga o columna) lineal-elástica con dos nodos y tres grados de libertad. La plasticidad se modela a través de resortes de giro, de longitud nula ubicados en sus extremos, para los cuales se define una relación de momento-rotación. Mediante el equilibrio estático de la barra y la evaluación del comportamiento plástico de las rotulas se establecen relaciones necesarias que permite analizar el problema no lineal de flexión en sus extremos

II.1 Elemento Viga-Columna

Deformaciones y Esfuerzos en Elemento Viga-Columna

Para la barra en estudio se restringen los desplazamientos de cuerpo rígido y se consideran únicamente tres grados de libertad. Los grados de libertad corresponden a los giros en ambos extremos y desplazamiento en la dirección longitudinal en uno de ellos tal como se muestra en la Figura II.1.

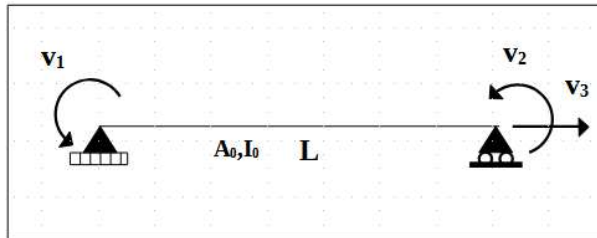


Figura II.1: Elemento Viga-Columna: Grados de libertad

El vector $\mathbf{v}$ de deformaciones del elemento de la Figura II.1, queda representado por la ec. (1). En esta ecuación v_1 es el giro del nudo inicial, v_2 es el giro del nudo final y v_3 es la deformación axial del elemento.

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Por otra parte el vector q , correspondiente a las cargas que actúan en los grados de libertad del elemento, se muestra en la ec. (2). En esta ecuación q_1 es el momento de flexión que actúa en nudo inicial, q_2 es el momento de flexión que actúa en nudo final y q_3 es la carga axial del nudo final

$$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Matriz de Flexibilidad Elemento Viga-Columna

La relación entre las deformaciones producidas en los extremos de la barra y las cargas aplicadas, se denomina matriz de flexibilidad. Para un elemento viga-columna con comportamiento elástico, esta relación se muestra en la Ec. (3) .

$$\{v\} = [f] \{q\} \quad (3)$$

Para elementos viga-columna de sección constante, en los cuales no se considera el efecto de corte, la matriz de flexibilidad f queda representada por:

$$f = \begin{pmatrix} \frac{L}{3EI} & \frac{-L}{6EI} & 0 \\ \frac{-L}{6EI} & \frac{L}{3EI} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{EA} \end{pmatrix} \quad (4)$$

Relación entre cargas y deformaciones Elemento Viga-Columna

La matriz que relaciona las cargas con los desplazamientos es la matriz de rigidez k .

$$\{q\} = [k] \{v\} \quad (5)$$

Se puede demostrar a partir de (3) y (5) que la matriz de rigidez k y es la inversa de la matriz de flexibilidad f es:

$$[k] = [f]^{-1} \quad (6)$$

Para elementos de sección constante, en los cuales no se considera el efecto de corte, la matriz de rigidez de k queda representada por:

$$k = \begin{pmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} & 0 \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} \end{pmatrix} = [f]^{-1} \quad (7)$$

II.2 Plasticidad Concentrada

El comportamiento no lineal de flexión en elementos viga-columna se puede incorporar utilizando rótulas plásticas en los extremos del elemento. La figura II.2 muestra el elemento viga-columna con rótulas plásticas en los extremos. Se considera un elemento axialmente rígido ($A_0=\infty$), para enfocar el análisis en el comportamiento a flexión de la barra que interactúa con rotulas plásticas concentradas en su extremos.

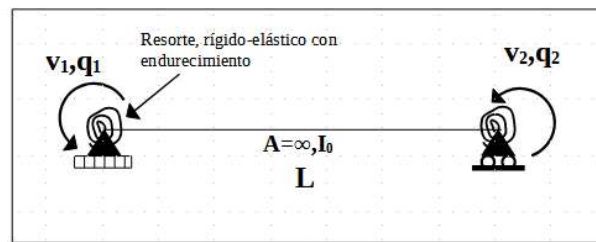


Figura II.2: Elemento Viga-Columna : Representación Plasticidad Concentrada

Las rotulas plásticas se idealizan mediante resortes rotacionales de longitud nula. Estos resortes son infinitamente rígidos hasta el momento de fluencia. Después del momento de fluencia M_y , sigue una zona de rigidez reducida que representa el endurecimiento de la rotula plástica, ver figura II.3. M_p es el momento de plástico y v_p es la rotación plástica.

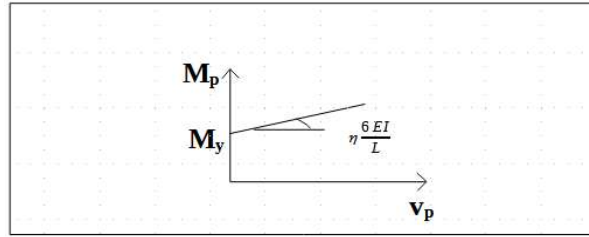


Figura II.3: Plasticidad Concentrada - Diagrama Interacción Momento-Rotación

Para valores por debajo de M_y , el resorte se comporta infinitamente rígido sin presentar deformaciones. El momento de flexión aplicado sobre el resorte se transmite directamente al elemento flexible, debido a que cada resorte se idealiza con longitud nula, y por lo tanto los momentos en los extremos del elemento viga-columna flexible son iguales a los momentos en las rotulas. El comportamiento descrito permite establecer las siguientes relaciones.

$$q = q_p = q_e \quad (8)$$

Es decir, en los extremos de la barra se cumple:

$$\begin{aligned} q_1 &= q_{p1} = q_{e1} \\ q_2 &= q_{p2} = q_{e2} \end{aligned} \quad (9)$$

Donde $q_{e1,2}$ corresponden a los momentos de flexión en los extremos del elemento viga-columna elástico y $q_{p1,2}$ corresponden a los momentos de flexión plásticos en los resortes de giro concentrados.

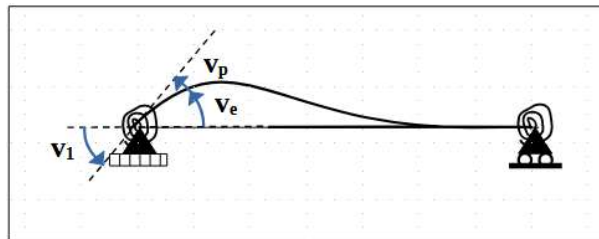


Figura II.4: Viga-Columna con Plasticidad Concentrada: Deformada

Al aplicar un momento de flexión superior a momento de fluencia en un extremo se genera giro elástico y plástico, ver Figura II.4. Esta relación queda representada por la Ec.(10):

$$v = v_e + v_p \quad (10)$$

Por lo tanto para en cada extremo se tiene:

$$\begin{aligned} v_1 &= v_{e1} + v_{p1} \\ v_2 &= v_{e2} + v_{p2} \end{aligned} \quad (11)$$

Donde $v_{e1,2}$ corresponden a los giros elásticos en los extremos del elemento viga-columna y $v_{p1,2}$ corresponden a los giros plásticos en los resortes. A partir de la Ec. (10) la flexibilidad del elemento viga-columna con plasticidad concentrada queda definida y diferenciando entre la componente elástica y plástica, se obtiene :

$$f = \frac{\partial v_e}{\partial q} + \frac{\partial v_p}{\partial q} \quad (12)$$

La matriz de flexibilidad f_e de un elemento viga-columna, rígido axialmente se reduce a la Ec. (13):

$$f_e = \begin{pmatrix} \frac{L}{3EI} & \frac{-L}{6EI} \\ \frac{-L}{6EI} & \frac{L}{3EI} \end{pmatrix} \quad (13)$$

La matriz de flexibilidad f_p de los resortes de giro, con los cuales se idealizan las rotulas plásticas, se expresa como sigue:

$$f_p = \frac{L}{6EI} \begin{pmatrix} \frac{mr_1}{\eta} & 0 \\ 0 & \frac{mr_2}{\eta} \end{pmatrix} \quad (14)$$

La expresión mr_i es igual a 0 cuando $q_i < M_p$ y es igual a 1 para $q_i \geq M_{pre}$. Reemplazando en la Ec.(3) de manera separada la matriz de flexibilidad f_e del elemento viga-columna y la matriz de flexibilidad f_p de las rotulas plásticas, se obtienen expresiones generales para el calculo de deformaciones .

$$v_e = f_e q \quad (15)$$

$$v_p = f_p (q - M_p) \quad (16)$$

El termino M_p es el vector que representa el momento de flexión fluencia a partir del cual se activan rotulas. Se puede concluir que cuando conocemos las cargas aplicas q en los extremos del elemento, determinar las deformaciones es directo, debido a que basta con evaluar las matrices de flexibilidad f_e y f_p y aplicar las , Ec. (15) y(16) respectivamente.

II.3 Análisis No Lineal -Calculo Analítico

El procedimiento para resolver el problema estático de una viga-columna con rotulas plásticas requiere un proceso iterativo. este método iterativo se puede escribir en forma matricial. En La Figura II.5 se esquematiza el proceso iterativo de tránsito entre un valor inicial arbitrario q_0 hasta determinar el valor de q objetivo que iguala las deformaciones v conocidas, a través de la implementado de las relaciones entre cargas y deformaciones utilizando comparación y ajustes marginales de los resultados parciales.

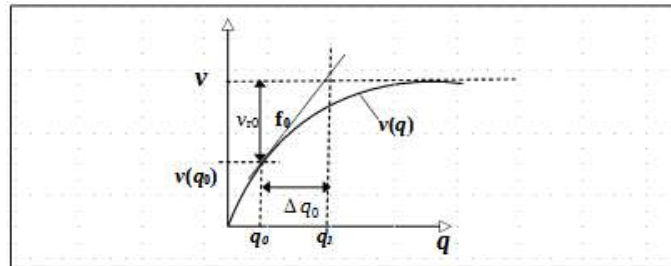


Figura II.5: Viga-Columna con Plasticidad Concentrada: Diagrama Deformación-Carga.

Etapas:

1. Evaluar Ec. (3) considerando un valor inicial arbitrario $q=q_0$:

$$v(q_0) = f_0 q_0 \quad (17)$$

Determinar la matriz de flexibilidad total inicial $f_0 = f_e + f_p$, para f_e y f_p evaluadas en q_0 . Mediante la Ec.(17) se determinan las deformaciones iniciales $v(q_0)$.

2. Calcular la diferencia entre las deformaciones conocidas $\mathbf{v}$ y las deformaciones calculas $\mathbf{v}(\mathbf{q}_0)$. Esta diferencia se denomina deformación residual $\mathbf{v}_{r0}$

$$\mathbf{v}_{r0} = \mathbf{v} - \mathbf{v}(\mathbf{q}_0) \quad (18)$$

Esta deformación residual representa el error entre la estimación inicial y el valor objetivo de las deformaciones $\mathbf{v}$.

3. Para disminuir el error, se corrige la estimación inicial $\mathbf{q}_0$, calculando la variación de fuerza asociada a esta deformación residual mediante la aplicación de la Ec. (5), donde la rigidez inicial corresponde a la inversa de la matriz de flexibilidad , es decir, $\mathbf{k}_0 = \mathbf{f}_0^{-1}$.

$$\Delta \mathbf{q}_0 = \mathbf{f}_0^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{q}_0) \quad (19)$$

Esta variación permite ajusta el valor $\mathbf{q}_0$ inicial, es decir, se calcula un nuevo valor $\mathbf{q}_1$

$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_0 + \Delta \mathbf{q}_0 \quad (20)$$

4. Con esta carga actualizada se calcula una nueva matriz de flexibilidad del elemento $\mathbf{f}_i = \mathbf{f}_e(\mathbf{q}_1) + \mathbf{f}_p(\mathbf{q}_1)$, se determinan nuevas deformaciones totales y deformaciones residuales. El proceso continua hasta cumplir el criterio de convergencia establecido, en este caso $\mathbf{v}_{rj} = 0$.

La forma general para la secuencia de iteración descrita es:

- **Inicialización**

Se define $\mathbf{q}_0$

- **Iteración**

$$\left[\begin{array}{l} \mathbf{v}_{rj} = \mathbf{v} - \mathbf{v}(\mathbf{q}_j) \end{array} \right. \quad (21)$$

$$\left[\begin{array}{l} \Delta \mathbf{q}_j = \mathbf{f}_j^{-1} \mathbf{v}_{rj} \end{array} \right. \quad (22)$$

$$\left[\begin{array}{l} \mathbf{q}_{j+1} = \mathbf{q}_j + \Delta \mathbf{q}_j \end{array} \right. \quad (23)$$

- **Solución**

Si $\mathbf{v}_{rn}$ cumple criterio de convergencia, finaliza el proceso

$$\mathbf{k} = \mathbf{f}_n^{-1} \quad (24)$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_n \quad (25)$$

III ANALISIS NO LINEAL ELEMENTO VIGA-COLUMNA - SIN CARGA AXIAL

En este capítulo se presenta la aplicación numérica del método analítico explicado en el Capítulo II, orientado a resolver el problema no lineal de plasticidad concentrada. Mediante un ejemplo numérico, se analiza un elemento viga-columna simplemente apoyado, sobre el cual se imponen deformaciones en sus extremos. Se detalla la aplicación del algoritmo paso a paso, permitiendo determinar las deformaciones elásticas y plásticas en el elemento viga-columna y rótulas plásticas respectivamente. Los resultados obtenidos se contrastan con modelo equivalente desarrollado en el software de análisis estructural no lineal SAP2000. El comportamiento de las rótulas plásticas en SAP2000 está limitado a 0.015rad para todos los casos analizados. Luego, en esta sección se compara las deformaciones elásticas y plásticas, obtenidas mediante Excel y con SAP2000.

III.1 Cálculo Analítico

Como caso de estudio se considera un elemento viga-columna, axialmente rígido, de longitud $L=700\text{cm}$, con una sección transversal de 40 cm X 60 cm y un material con elasticidad $E=200\text{ tonf/cm}^2$. El elemento tiene rótulas plásticas concentradas en sus extremos con momentos de fluencias son M_y de 3500 tonf-cm. El endurecimiento plástico está definido por el coeficiente $\eta=0.05$. En este ejemplo se determinan las fuerzas básicas y la rigidez total del elemento viga-columna cuando los giros en sus extremos son, $\nu_1=0.006\text{ [rad]}$ y $\nu_2=0.003\text{ [rad]}$ (ver Figura II.2).

Solución:

Para determinar el estado del elemento viga-columna con plasticidad concentrada, se utiliza la herramienta de Excel. Esta herramienta permite formatear y organizar mediante una hoja de cálculo las relaciones entre cargas y deformaciones para estados de equilibrio intermedio del elemento. La evaluación, por pasos, de las ecuaciones (3), (5) y (21) a (25), permite mostrar la convergencia de los giros hasta

alcanzar los valores conocidos en los extremos del elemento y la rigidez total, que satisfacen el equilibrio respecto de las deformaciones impuestas.

• Datos de Entrada

Los parámetros geométricos y propiedades del elemento se resumen en Tablas III.1 y III.2.

Tabla III.1: Geometría Elemento y Propiedades Sección

Datos del elemento		
B	40	cm
H	60	cm
L	700	cm
I	720000	cm ⁴
E	200	tonf/cm ²
Propiedades Sección		
E*I	144000000	tonf*cm ²
L/6EI	8,102E-07	rad/tonf-cm

Tabla III.2: Parámetros Rotulas Plásticas

Datos rotula plástica		
Mp	3500	Tonf-cm
η	0,05	

La Tabla III.3 muestra la matriz de flexibilidad f_e del elemento viga-columna, obtenida evaluando la Ec.(13). Cabe señalar que f_e es independiente del valor de q_j , por lo tanto se calcula, por única vez, al inicio de procedimiento.

Tabla III.3: Matriz de Flexibilidad elemento Viga-Columna

f_e [rad/tonf-cm]	
1,620E-06	-8,102E-07
-8,102E-07	1,620E-06

La matriz de flexibilidad f_p de las rotulas, descrita en Ec. (14), se calculada en cada iteración, mediante la comparación de la magnitud de los momentos de flexión q_i y el momento de fluencia M_y . Las deformaciones conocidas v se presentan en Tabla III.4.

Tabla III.4: Deformaciones impuesta en los extremos del elemento

v [rad]	
v1	0,006
v2	0,003

• Iteración - Paso 0

Se define $q_{(0)} = \{0;0\}$ (ver tabla III.5, columna 1-filas 3 a 4) y se calcula la matriz f_p (ver tabla III.5, columnas 2 a 4 -filas 3 a 4). Debido a que los momentos en los extremos son iguales a cero, se verifica $q_{(0)} < M_y$, por lo tanto la matriz $f_p = [0]$. Se determinan las deformaciones iniciales en los extremos del elemento, $v_{(0)} = v_e + v_p$, para $q_{(0)}$. Las componentes elástica y plástica se determinan utilizando las Ec.(15) y (16). Para este paso inicial tanto v_e como v_p son cero. El calculo de la deformación residual, da como resultado el vector $v_{r(0)} = \{0.006; 0.003\}$ (ver tabla III.5, columna 8-filas 3 a 4), cuyas magnitudes son idénticas a las deformaciones impuestas en los extremos del elemento.

Tabla III.5: Calculo Analítico: Determinación Fuerzas Básicas

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	Carga	Rotulas Plásticas			Deformaciones				Flexibilidad V-C		Rigidez V-C		Cargas Corregidas	
2	q(0)	mr(0)	fp(0)		vp(0)	ve(0)	v(0)	vr(0)	f(0)		k(0)		dq(0)	q(1)= q(0)+dq(0)
3	0	0	0	0	0,000	0,000	0,000	0,006	1,62E-06	-8,10E-07	822857	411429	6171	6171,43
4	0	0	0	0	0,000	0,000	0,000	0,003	-8,10E-07	1,62E-06	411429	822857	4937	4937,14
5														
6	q(1)	mr(1)	fp(1)		vp(1)	ve(1)	v(1)	vr(1)	f(1)		k(1)		dq(1)	q(2)= q(1)+dq(1)
7	6171,43	1	1,62E-05	0	0,0433	0,0060	0,049	-0,043	1,78E-05	-8,10E-07	56220	2555	-2493	3678,32
8	4937,14	1	0	1,62E-05	0,0233	0,0030	0,026	-0,023	-8,10E-07	1,78E-05	2555	56220	-1420	3517,33
9														
10	q(2)	mr(2)	fp(2)		vp(2)	ve(2)	v(2)	vr(2)	f(2)		k(2)		dq(2)	q(3)= q(2)+dq(2)
11	3678,32	1	1,62E-05	0	0,002889	0,00311	0,0060	0,0000	1,78E-05	-8,10E-07	56220	2555	0	3678,32
12	3517,33	1	0	1,62E-05	0,000281	0,00272	0,0030	0,0000	-8,10E-07	1,78E-05	2555	56220	0	3517,33

Debido a que el vector de deformación residual es distinto de $\{0\}$, se debe modificar la carga inicial para obtener un valor $q_{(1)}$ corregido. Se calcula la matriz de flexibilidad total $f_{(0)}$ (ver tabla 5, columnas 9 a 10-filas 3 a 4), aplicando Ec (12). En este paso inicial $f_{(0)} = f_e$, debido a que no se activaron las rotulas plástica ($q_{(0)} < M_y$), el elemento presenta un comportamiento elástico. Se calcula la matriz de rigidez k_0 , aplicando Ec. (6). El diferencial de carga necesario para ajustar la carga inicial, se obtiene aplicando Ec (19) (ver tabla III.5, columna 13-filas 3 a 4). Finalmente se obtiene un carga ajustada $q_{(1)} = q_{(0)} + \Delta q_{(0)}$ (ver tabla III.5, columna 14-filas 3 a 4).

• Iteración (Paso 1)

Como resultado del paso anterior se obtiene $q_{(1)} = \{6171; 4937\}$, se actualizan f_e y f_p según corresponda. Debido a que la flexión $q_{(1)} > M_p$ la matriz f_p es distinta de $[0]$, se activan ambas rotulas plástica. Se determina $v_{(1)} = v_e + v_p$, tanto v_e como v_p son distintos de cero. Los resultados del calculo de la deformación residual se muestra en tabla III.5, columna 8 - filas 7 a 8. Debido a que el vector de deformación residual $v_{r(1)}$ es distinto de $\{0\}$, se debe corregir la cargar $q_{(1)}$ y continuar con la siguiente iteración. Tal como en el paso 0, se calcula la matriz de flexibilidad $f_{(1)}$ del elemento viga-columna con plasticidad concentrada, (ver tabla III.5, columnas 9 a 10-filas 7 a 8). Se calcula la inversas de $f_{(1)}$ y se obtiene $k_{(1)}$. Finalmente la carga ajustada final $q_{(2)} = q_{(1)} + \Delta q_{(1)}$ (ver tabla III.5, columna 14-filas 7 a 8).

• Iteración (Paso 2) (ver tabla 5, columnas 1 a 14 -filas 3 y 4)

Como resultado del paso anterior se obtiene $q_{(2)} = \{3678; 3517\}$, tal como en el paso 1, se calcula f_e y f_p . Luego se determina $v_{(2)} = v_e + v_p$ (ver tabla III.5, columna 7 -filas 7 a 8).. El calculo de la deformación residual, da como resultado el vector $v_{r(2)} = \{0.000; 0.000\}$ (ver tabla III.5, columna 8 -filas 7 a 8) esto finaliza el proceso de iteración,. El vector $q_{(2)}$ representa los momentos de flexión que producen giros impuestos en los extremos del elemento. Para finalizar el análisis determinamos la matriz $k_{(2)}$ y verificamos que $\Delta q_{(2)} = k_{(2)} v_{r(2)} = \{0\}$. El procedimiento descrito, permite determinar los momentos de flexión y la matriz de rigidez asociados a lo giros v conocidos,

ademas permite determinar el giro en rotulas plásticas respectivamente (ver tabla III.5, columnas 6 y 7 -filas 7 a 8)

III.2 Comprobación SAP2000

En esta sección se resuelve el ejemplo del elemento viga-columna con plasticidad concentrada analizado en el punto anterior, realizando en SAP2000 un análisis estático no lineal . Se resuelve el problema inverso al resuelto en el punto anterior, es decir, se determinan las deformaciones del elemento viga-columna, cuando se aplica en los extremos los momentos obtenidos en el punto III.1.

- Datos de Entrada

Para modelar el problema se utilizan las distinta interfaces para ingreso de datos, con las que cuenta el software SA2000. Se definió las propiedades de material, la geometría de la sección y las condiciones de apoyo del elemento. Se debe tener presente, por consistencia con el ejemplo anterior, se deben modificar los parámetros geométricos de la sección para no considerar las deformaciones de corte.

La figura III.1 muestra la interfase de configuración que permite definir rotulas plásticas para momento de flexión M3. La hoja de entrada requiere la definición del parámetro “*Yield Moment*” correspondiente al momento de fluencia $M_y = 3500$ tonf-cm. La curva de interacción se ingresa parametrizada mediante el momento normalizado M/M_y vs rotación. Se definen dos puntos en particular, el punto-1 que corresponde al inicio de la curva con rotación 0.00 rad y el punto-2 que representa el final de la curva de endurecimiento para una rotación 0.015 rad. Es necesario calcular el valor del momento normalizado para ambos giros. Para punto 1, el valor normalizado es igual a $M_I/M_y = 1$, debido a que $M_I = M_y$. En el punto 2, mediante la aplicación de Ec. 5 y Ec. 6, se determina el momento de flexión M_2 (ver Ec. 29) para una rotación 0.015 rad.

$$M_2 = M_p + f_p^{-1} v p \quad (26)$$

Donde $f_p^{-1} = 1/f_p$ y f_p es la flexibilidad de la rótula plástica definida como sigue:

$$f_p = \frac{L}{6EI} \frac{mr}{\eta} \quad (25)$$

Reemplazando se obtiene $M_2 = 4425,71$ tonf-cm, que normalizando es $M_2/M_y = 1,265$ tonf-cm. Las figuras III.2 y III.3 muestran la interfase de asignación de rotulas plásticas en cada extremo del elemento viga-columna. Se utiliza la opción de distancia relativa para indicar su ubicación respectiva.

Frame Hinge Property Data for FH1 - Moment M3

Edit

Displacement Control Parameters

Point	Moment/SF	Rotation/SF
E-	-0,2	-0,025
D-	-0,2	-0,015
C-	-1,2644	-0,015
B-	-1	0
A	0	0
B	1	0
C	1,2644	0,015
D	0,2	0,015
E	0,2	0,025

☒ Symmetric

Load Carrying Capacity Beyond Point E

☒ Drops To Zero
☐ Is Extrapolated

Scaling for Moment and Rotation

☐ Use Yield Moment Moment SF Positive: 3500, Negative:
☐ Use Yield Rotation Rotation SF Positive: 1, Negative:
(Steel Objects Only)

Acceptance Criteria (Plastic Rotation/SF)

☒ Immediate Occupancy Positive: 0, Negative:
☐ Life Safety Positive: 0,012 Negative:
☐ Collapse Prevention Positive: 0,015 Negative:
☐ Show Acceptance Criteria on Plot

Type

☒ Moment - Rotation
☐ Moment - Curvature

Hinge Length:
☐ Relative Length

Hysteresis Type And Parameters

Hysteresis Type: Isotropic

No Parameters Are Required For This Hysteresis Type

OK Cancel

Figura III.1: SAP2000 Rotulas Plástica: Definición Relación Momento - Rotación

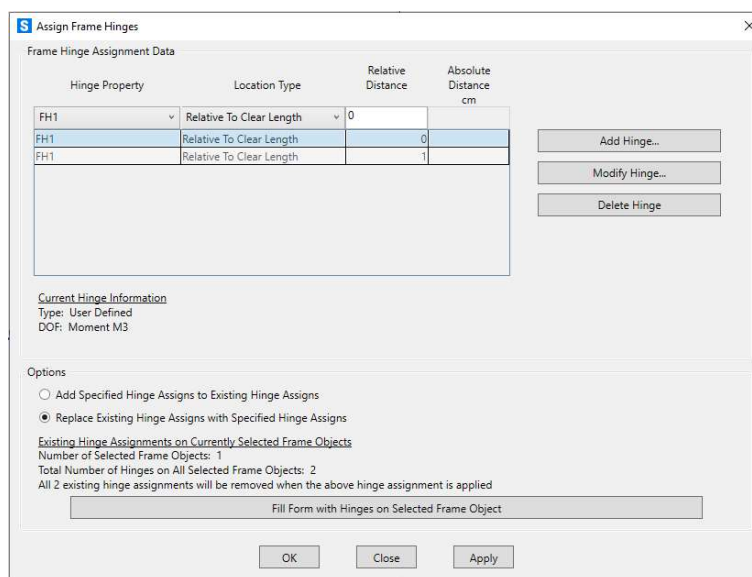


Figura III.2: SAP2000 Rotulas Plástica: Ubicación

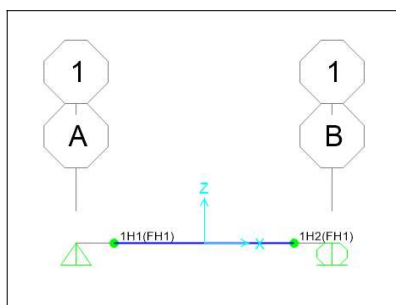


Figura III.3: SAP2000 Elemento Viga-Columna : Vista general

La figura III.4 muestra la deformada del elemento viga-columna, debido a los momentos aplicados en los extremos. Estos momentos corresponde a los valores obtenidos del ejemplo resuelto utilizando Excel, $q_1=3678,32$ tonf-cm y $q_2=3517,33$ tonf-cm, respectivamente

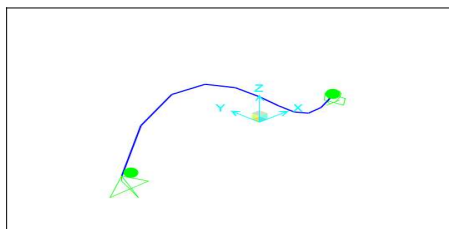


Figura III.4: SAP2000 Elemento Viga-Columna: Deformada

Al aplicar q_1 y q_2 en los extremos, se obtienen rotaciones totales (Ver La Tabla III.6) $\{0.0061; 0,003\}$. Estos resultados confirman la hipótesis de entrada $v=\{0.006; 0,003\}$ del problema resuelto en Excel.

Tabla III.6: Resultados: Giros Totales en rotulas elemento viga-columna

	Joint Text	OutputCase Text	CaseType	StepType	U1 cm	U2 cm	U3 cm	R1 Radians	R2 Radians	R3 Radians
▶	1	SC NL	NonStatic	Max	0	0	0	0	-0,006001	0
	1	SC NL	NonStatic	Min	0	0	0	0	-0,006001	0
	2	SC NL	NonStatic	Max	0	0	0	0	-0,003	0
	2	SC NL	NonStatic	Min	0	0	0	0	-0,003	0

En las tablas III.7 y III.8 se presentan los giros plásticos obtenidos con el modelo SAP2000 y con Excel, respectivamente. Al comparar los resultados (Ver Tabla 9) obtenidos por el modelo en SAP2000 y con Excel se observa que las diferencia entre las rotaciones plásticas son menores a 0,5%.

Tabla III.7: Resultados: Momentos y Giros Plásticos, en rotula - Modelo SAP2000

Resultados Sap2000								
Frame	Assign Hinge	M3 Tonf-cm	U1Plastic .cm	U2Plastic .cm	U2Plastic .cm	R1Plastic Radians	R2Plastic Radians	R3Plastic Radians
1	FH1	-3678,32	0	0	0	0	0	-0,00289
1	FH1	3517,33	0	0	0	0	0	0,000281

Tabla III.8: Resultados: Momentos y Giros Plásticos, en rotula- Calculo Analítico

Resultados Iteración					
10	q(2)	mr(2)	fp(2)		vp(2)
11	3678,32	1	1,62E-05	0	0,002889
12	3517,33	1	0	1,62E-05	0,000281

Tabla III.9: Comparación: Rotaciones plásticas – SAP2000 vs Calculo Analítico

Ubicación	Sap2000 [rad]	Iteración [rad]	Error [%]
vp1	0,002890	0,002889	0,03 %
vp2	0,000281	0,000281	0,00 %

IV ANALISIS NO LINEAL ELEMENTO VIGA-COLUMNA -CON CARGA AXIAL

La incorporación de carga axial en un elemento viga-columna con plasticidad concentrada, se abordara mediante la determinación de la interacción entre momento de flexión y carga axial, derivado de las propiedades geométricas y mecánicas de la sección analizada. Esta interacción define el momento de fluencia concomitante con la carga axial aplicada. Se considerara una relación carga axial-deformación elástica perfectamente plástica sin endurecimiento.

El comportamiento del elemento tipo viga-columna sometido a momento y carga axial se evalúa modificando la magnitud del momento de flexión desde valores menores a M_y , hasta momentos que producen el máximo giro en la rótula plástica, ver figura IV.1 (limitado a 0.02rad para todos los casos analizados). Luego, en esta sección se compara la trayectoria de las deformaciones elásticas y plásticas, obtenidas mediante Excel y con SAP2000

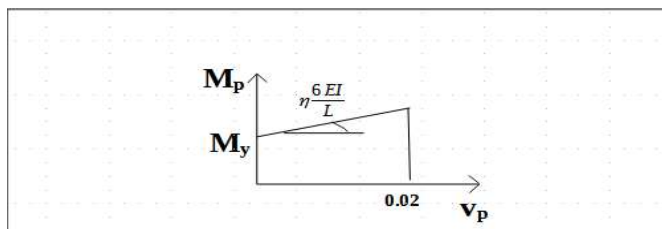


Figura IV.1: Relación Momento – Rotación : Elemento con carga Axial

IV.1 Calculo Analítico

Como caso de estudio se considera un elemento viga-columna, axialmente rígido, de longitud $L=700\text{cm}$, con una sección transversal de $20\text{cm} \times 40\text{cm}$ y un material con elasticidad $E=1000 \text{ tonf/cm}^2$ y una tensión de fluencia de $f_y=2 \text{ tonf/cm}^2$. La geometría de la sección transversal y las propiedades mecánicas son distintas a las definidos en e ejemplo del punto III.1. La sección transversal posee un material homogéneo, con un comportamiento elasto-plástico perfecto simétrico. El elemento

incluye rotulas plásticas concentradas en sus extremos. El endurecimiento plástico de los resortes de giro estará definido por el coeficiente $\eta=0.05$.

El objetivo general del análisis iterativo es determinar las fuerzas básicas y la rigidez del elemento viga-columna para giros totales impuestos en sus extremos. Para determinar la trayectoria de los giros totales (elásticos + plásticos) en las rotulas plásticas, primero se seleccionan combinaciones de carga axial y momento de fluencia concomitantes, mediante la utilización de la planilla descrita en el Punto II.1. Luego se calcula el momento asociado, modificando el giro en los extremos del elemento viga columna, hasta encontrar el giro total asociado al momento de fluencia objetivo. Este último paso se repite para valores de momento menores y mayores que M_y , obteniendo los giros elásticos y plásticos para distintas combinaciones de momento y carga axial fija (ver figura IV.2). Este proceso se lleva a cabo con otras combinaciones de carga axial y momento de fluencia

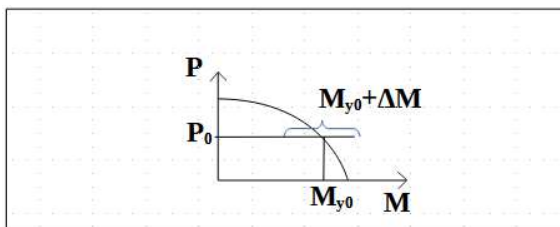


Figura IV.2: Diagrama Interacción Carga Axial -Momento

Solución:

Para determinar el estado del elemento viga-columna con plasticidad concentrada sometido a flexión y carga axial, se utiliza la herramienta Excel. Primero se prepara una planilla para calcular el diagrama de interacción de la sección de 20cmx40cm (Ver Anexo A). Una vez definido el diagrama de interacción se seleccionan una combinación de momento y carga axial. Con la herramienta de “búsqueda de valor objetivo” disponible en Excel, mediante iteración, se determinan los giros totales asociados a los momentos de fluencia seleccionados. El procedimiento descrito conlleva un doble proceso de iteración, la modificación del giro en los extremos y la

resolución de la planilla descrita en punto II.1. para obtener las fuerzas básicas objetivos, para distintos decrementos e incrementos de momento respecto de valor de momento de fluencia.

• Datos de Entrada

Los parámetros geométricos y propiedades del elemento se resumen en Tablas IV.1 y IV.2.

Tabla IV.1: Geometría Elemento y Propiedades Sección

Datos del elemento		
B	20	cm
H	40	cm
L	700	cm
I	26666,6666666667	cm ³
I	106666,666666667	cm ⁴
E1	1000	tonf/cm ²

Propiedades Sección		
E*A	800000	tonf
E*I	106666666,7	tonf*cm ²
L/6EI	1,09375E-06	rad/tonf-cm

Tabla IV.2: Parámetros Material

Propiedades Material	
ε	0,002[cm/cm]
E1	1000tonf/cm ²
f_y	2tonf/cm ²

El calculo (Ver Anexo A) del diagrama interacción de la sección 20cmx40cm, proporciona valores de carga axial máxima de 1600 tonf, (con sus signos respectivos para compresión y tracción) y un momento de fluencia máximo de 10500 tonf-cm. El diagrama de interacción se muestra en la Figura IV.3. Las solicitaciones concomitantes que se analizan en este trabajo se muestran en tabla IV.3.

La Tabla IV.4 muestra la matriz de flexibilidad f_e , del elemento viga-columna acotada a lo momentos de flexión. La matriz f_e es independiente del valor de q_j , por lo tanto se calcula, por única vez, al inicio de procedimiento.

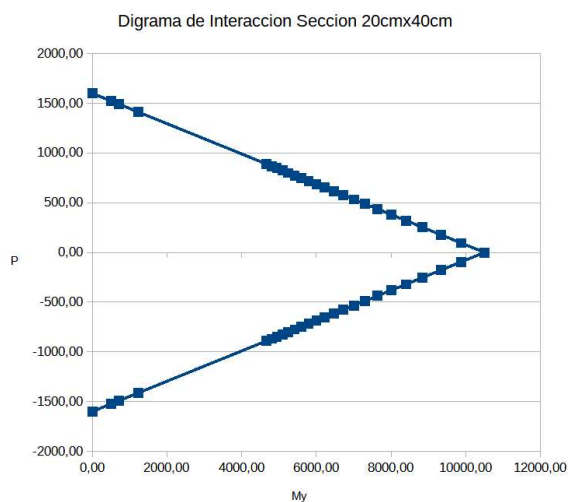


Figura IV.3: Diagrama de Interacción Sección 20cmx40cm

Tabla IV.3: Cargas Axiales y Momentos de Fluencia Analizados

Pi [tonf]	Myi [tonf-cm]
0,00	10500,00
50,00	10171,87
100,00	9843,75
150,00	9515,62
200,00	9187,50
250,00	8859,37
300,00	8531,25

Tabla IV.4: Matriz de Flexibilidad elemento Viga-Columna

fe [rad/tonf-cm] y [cm/tonf] respectivamente		
2,188E-06	-1,094E-06	0,000E+00
-1,094E-06	2,188E-06	0,000E+00
0,000E+00	0,000E+00	8,750E-04

La matriz de flexibilidad f_p de las rotulas, descrita en Ec. (14), se calculada en cada iteración, mediante la comparación de la magnitud de lo momentos de flexión q_j y el momento de fluencia M_y . Las deformaciones impuestas v .

• Caso 1 ($P = 0$ [tonf] y $M_y = 10500$ [tonf-cm])

Se determinaran los giros elásticos v_e en los extremos del elemento viga-columna, para el estado de carga $q_i = \{M_y; 0\}$, a través de la Ec (15). Luego con la planilla definida en el punto III.1. se modifican los giros v , manteniendo los criterios de convergencia, es decir, se define $q_{(0)} = \{0; 0\}$, se calcula la matriz f_p verificando $q_{(i)}$ en relación a M_y . Luego se determinan las deformaciones en los extremos del elemento, $v_{(i)} = v_{ei} + v_{pi}$, para $q_{(i)}$. Se calcula la deformación residual. Se calcula la matriz de rigidez k_i , se determinar el diferencial de carga necesario para ajustar la carga $q_{(0)}$, se obtiene $q_{(i+1)}$. El proceso se repite hasta que el diferencial de carga es $\Delta q_{(n)} = \{0\}$. Los resultados mostrados en tabla IV.5 (filas 11 y 12; columna 5) confirman que no existen giros plásticos en ninguna de las rotulas del elemento viga-columna.

Tabla IV.5: Calculo - giros totales para $q_i = \{10500 ; 0\}$ [tonf-cm] y $P=0$ [tonf]

Datos rotula plástica								v					
My	10500,00		Tonf-cm					v1	0,022969	[rad]			
η	0,05000							v2	-0,011484	[rad]			
P	0		Tonf					v3	0,00000	[cm]			

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	Carga	Rotulas Plásticas		Deformaciones				Flexibilidad V-C		Rigidez V-C		Cargas Corregidas	
2	q(0)	mr(0)	fp(0)	vp(0)	ve(0)	v(0)	vr(0)	f(0)		k(0)		dq(0)	q(1)= q(0)+dq(0)
3	0	0	0	0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0230	2,19E-06	-1,09E-06	609524	304762	10500
4	0	0	0	0	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0115	-1,09E-06	2,19E-06	304762	609524	0
5													10500,00
6	q(1)	mr(1)	fp(1)	vp(1)	ve(1)	v(1)	vr(1)	f(1)		k(1)		dq(1)	q(2)= q(1)+dq(1)
7	10500,00	1	2,19E-05	0	0,0000	0,0230	0,0230	0,0000	2,41E-05	-1,09E-06	42525	21262	0
8	0,00	0	0	0,00E+00	0,0000	-0,0115	-0,0115	0,0000	-1,09E-06	2,19E-06	21262	467774	0
9													0,00
10	q(2)	mr(2)	fp(2)	vp(2)	ve(2)	v(2)	vr(2)	f(2)		k(2)		dq(2)	q(3)= q(2)+dq(2)
11	10500,00	1	2,19E-05	0	0,000000	0,022969	0,022969	0,0000	2,41E-05	-1,09E-06	42525	21262	0
12	0,00	0	0	0,00E+00	0,000000	-0,011484	-0,011484	0,0000	-1,09E-06	2,19E-06	21262	467774	0

Para analizar las trayectoria de los giros plásticos en la rotula, con la herramienta “búsqueda de valor objetivo”, disponible en Excel, se modifica el giro total en el extremo, partiendo de giro elástico definido para M_y , hasta alcanzar el distintos momento objetivo $M=M_y+\Delta M$. Se repite este análisis para distintos valores de $\Delta M = \{-100; -10; 10; 20; 30; 100; 200; 400; 600; 900\}$. Para $M_y = 10500$ se obtiene to $M = \{10400; 10490; 10510; 10520; 10530; 10600; 10700; 10900; 11100; 11400\}$ (Ver Anexo B para revisar detalle del cálculo). En tablas IV.6 y IV.7 se muestran los resultados para $M = \{10490; 10510\}$. En tabla IV.8 se muestra resumen para todos los momento analizados.

Tabla IV.6: Calculo - giros totales para $q_i = \{10490 ; -5\}$ [tonf-cm] y P=0 [tonf]

Datos rotula plástica								v							
M	10490,00			Tonf-cm		v1	0,022952	[rad]		v2	-0,011484	[rad]		v3	0,00000
η	0,05000														
P	0			Tonf											

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	Carga	Rotulas Plásticas		Deformaciones				Flexibilidad V-C		Rigidez V-C		Cargas Corregidas	
2	q(0)	mr(0)	fp(0)	vp(0)	ve(0)	v(0)	vr(0)	f(0)		k(0)		dq(0)	q(1)= q(0)+dq(0)
3	0	0	0	0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0230	2,19E-06	-1,09E-06	609524	304762	10490
4	0	0	0	0	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0115	-1,09E-06	2,19E-06	304762	609524	-5
5													
6	q(1)	mr(1)	fp(1)	vp(1)	ve(1)	v(1)	vr(1)	f(1)		k(1)		dq(1)	q(2)= q(1)+dq(1)
7	10490,00	0	0,00E+00	0	0,0000	0,0230	0,0230	0,0000	2,19E-06	-1,09E-06	609524	304762	0
8	-5,00	0	0	0,00E+00	0,0000	-0,0115	-0,0115	0,0000	-1,09E-06	2,19E-06	304762	609524	0
9													
10	q(2)	mr(2)	fp(2)	vp(2)	ve(2)	v(2)	vr(2)	f(2)		k(2)		dq(2)	q(3)= q(2)+dq(2)
11	10490,00	0	0,00E+00	0	0,000000	0,022952	0,022952	0,0000	2,19E-06	-1,09E-06	609524	304762	0
12	-5,00	0	0	0,00E+00	0,000000	-0,011484	-0,011484	0,0000	-1,09E-06	2,19E-06	304762	609524	0

Tabla IV.7: Calculo - giros totales para $q_i = \{10510 ; 5\}$ [tonf-cm] y P=0 [tonf]

Datos rotula plástica								v							
M	10510,00			Tonf-cm		v1	0,023204	[rad]		v2	-0,011484	[rad]		v3	0,00000
η	0,05000														
P	0			Tonf											

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	Carga	Rotulas Plásticas		Deformaciones				Flexibilidad V-C		Rigidez V-C		Cargas Corregidas	
2	q(0)	mr(0)	fp(0)	vp(0)	ve(0)	v(0)	vr(0)	f(0)		k(0)		dq(0)	q(1)= q(0)+dq(0)
3	0	0	0	0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0232	2,19E-06	-1,09E-06	609524	304762	10643
4	0	0	0	0	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0115	-1,09E-06	2,19E-06	304762	609524	72
5													
6	q(1)	mr(1)	fp(1)	vp(1)	ve(1)	v(1)	vr(1)	f(1)		k(1)		dq(1)	q(2)= q(1)+dq(1)
7	10643,33	1	2,19E-05	0	0,0031	0,0232	0,0263	-0,0031	2,41E-05	-1,09E-06	42525	21262	-133
8	71,67	0	0	0,00E+00	0,0000	-0,0115	-0,0115	0,0000	-1,09E-06	2,19E-06	21262	467774	-67
9													
10	q(2)	mr(2)	fp(2)	vp(2)	ve(2)	v(2)	vr(2)	f(2)		k(2)		dq(2)	q(3)= q(2)+dq(2)
11	10510,00	1	2,19E-05	0	0,000219	0,022985	0,023204	0,0000	2,41E-05	-1,09E-06	42525	21262	0
12	5,00	0	0	0,00E+00	0,000000	-0,011484	-0,011484	0,0000	-1,09E-06	2,19E-06	21262	467774	0

Tabla IV.8: Resumen giros totales para $\Delta M = \{-100; -10; 10; 20; 30; 100; 200; 400; 600; 900\}$, $M_y = 10500.00$ [tonf-cm], $P=0$ [tonf]

		q(2) [tonf-cm]	vp(2) [rad]	ve(2) [rad]	v(2) [rad]
P	0,00	10400,00	0,000000	0,022805	0,022805
My	10400,00	-50,00	0,000000	-0,011484	-0,011484
P	0,00	10490,00	0,000000	0,022952	0,022952
My	10490,00	-5,00	0,000000	-0,011484	-0,011484
P	0,00	10500,00	0,000000	0,022969	0,022969
My	10500,00	0,00	0,000000	-0,011484	-0,011484
P	0,00	10510,00	0,000219	0,022985	0,023204
My	10510,00	5,00	0,000000	-0,011484	-0,011484
P	0,00	10520,00	0,000438	0,023002	0,023439
My	10520,00	10,00	0,000000	-0,011484	-0,011484
P	0,00	10530,00	0,000656	0,023018	0,023674
My	10530,00	15,00	0,000000	-0,011484	-0,011484
P	0,00	10600,00	0,002188	0,023133	0,025320
My	10600,00	50,00	0,000000	-0,011484	-0,011484
P	0,00	10700,00	0,004375	0,023297	0,027672
My	10700,00	100,00	0,000000	-0,011484	-0,011484
P	0,00	10900,00	0,008750	0,023625	0,032375
My	10900,00	200,00	0,000000	-0,011484	-0,011484
P	0,00	11100,00	0,013125	0,023953	0,037078
My	11100,00	300,00	0,000000	-0,011484	-0,011484
P	0,00	11400,00	0,019688	0,024445	0,044133
My	11400,00	450,00	0,000000	-0,011484	-0,011484

Los resultados confirman que, para valores de $M \leq M_y$, no se producen deformación plásticas en extremo 1 y cuando $M > M_y$, las deformaciones plásticas se incrementan en proporción al momento aplicado, por ejemplo para $M = 10600$ [tonf-cm], $M - M_y = \Delta M$, por tanto $vpI = f^* \Delta M = 2,1875E-05 * 100 = 0.002188$ [rad]

IV.2 Comprobación SAP2000

Utilizando SAP2000 se realiza el mismo procedimiento descrito en punto III.2, para todos las combinaciones de carga axial, momentos de fluencia y variaciones de momento. Se presentan los resultados el problema inverso, determinando las deformaciones en un elemento viga-columna con plasticidad concentrada, aplicando los momentos obtenidos en el punto III.1 en sus extremos.

- Datos de Entrada

En la Figura IV.4 muestra la interfase de configuración que permite definir rotulas plásticas para momento de flexión M_3 . Para distintos niveles de carga axial, requiere la definición de la curva de interacción, ingresada parametrizada mediante el momento normalizado M/M_y vs rotación. Se definen dos puntos en particular, el punto-1 que corresponde al inicio de la curva con rotación 0.00 rad y el punto-2 que representa el final de la curva de endurecimiento para una rotación 0.02 rad. Es necesario calcular el valor del momento normalizado para ambos giros. Para punto 1, el valor normalizado es igual a $M_1/M_y = 1$, debido a que $M_1 = M_y$. En el punto 2, mediante la aplicación de Ec. 5 y Ec. 6, se determina el momento de flexión M_2 (ver Ec. 29) para una rotación 0.02 rad.

$$M_2 = M_p + f_p^{-1} v p \quad (26)$$

Donde $f_p^{-1} = 1/f_p$ y f_p es la flexibilidad de la rotula plástica definida como sigue:

$$f_p = \frac{L}{6EI} \frac{m r}{\eta} \quad (25)$$

En tabla IV.9 resume los momentos fluencia M_f y los momentos M_2 normalizados.

Tabla IV.19: Resumen Curvas Normalizadas Momento -Rotación

Pi [tonf]	M1=My [tonf-cm]	Vp1 [rad]	M1/My []	η	M2 [tonf-cm]	Vp2 [rad]	M2/My []
0,00	10500,00	0,00	1,00	0,0500	11414,29	0,02	1,0871
50,00	10171,87	0,00	1,00	0,0500	11086,16	0,02	1,0899
100,00	9843,75	0,00	1,00	0,0500	10758,03	0,02	1,0929
150,00	9515,62	0,00	1,00	0,0500	10429,91	0,02	1,0961
200,00	9187,50	0,00	1,00	0,0500	10101,78	0,02	1,0995
250,00	8859,37	0,00	1,00	0,0500	9773,66	0,02	1,1032
300,00	8531,25	0,00	1,00	0,0500	9445,53	0,02	1,1072

En figura IV.5 se muestra interfase para definir diagrama de interacción (carga axial vs momento) normalizo. En tabla IV.10 se presentan los valores normalizados de la curva de interacción, con $P_{max}=1600$ [tonf] y $M_{max}=10500$ [tonf-cm] (ver anexo A)

Tabla IV.10: SAP2000: Resumen Diagrama Iteración Normalizada

P/Pmax []	M/Mmax []
-1,000	0,000
-0,500	0,500
-0,467	0,533
-0,385	0,615
-0,273	0,727
-0,111	0,889
0,000	1,000
0,111	0,889
0,273	0,727
0,385	0,615
0,467	0,533
0,500	0,500
1,000	0,000

SAP2000 selecciona el momento de fluencia a partir de la carga axial aplicada al modelo, utilizando del diagrama de interacción ingresado en interfase mostrada en figura IV.5. El comportamiento de las rotulas plásticas en los extremos del elemento se define de la curvas ingresadas para cada carga axial analizada (ver Figura IV.4) , es decir $P=\{0; 50; 100; 150; 200; 250; 300\}$ [tonf].

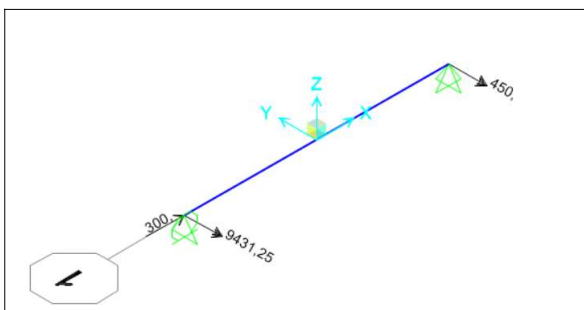


Figura IV.6: SAP2000: Cargas aplicadas modelo elemento viga-columna, $P=300$ [tonf]

Al aplicar los momentos q_1 y q_2 (ver Tabla IV.8), obtenidos en punto IV.1, en los extremos del elemento viga-columna. se obtienen en SAP2000 las rotaciones totales y rotaciones plásticas en las rotulas. Los resultados se presentan en Tablas IV.11 y IV.12 respectivamente.

Tabla IV.11: SAP2000: Giros totales , $M_y=10500.00$ [tonf-cm], $P=0$ [tonf]

Joint [text]	Output Case [text]	M3 [tonf-cm]	CaseType [text]	StepType [text]	U1 [cm]	U2 [cm]	U3 [cm]	R1 [rad]	R2 [rad]	R3 [rad]
1	SC NL	-10400,00	NonStatic	Max	0	0	0	0	-0,022805	0
1	SC2 NL	-10490,00	NonStatic	Max	0	0	0	0	-0,022952	0
1	SC3 NL	-10500,00	NonStatic	Max	0	0	0	0	-0,022969	0
1	SC4 NL	-10510,00	NonStatic	Max	0	0	0	0	-0,023204	0
1	SC5 NL	-10520,00	NonStatic	Max	0	0	0	0	-0,023439	0
1	SC6 NL	-10530,00	NonStatic	Max	0	0	0	0	-0,023674	0
1	SC7 NL	-10600,00	NonStatic	Max	0	0	0	0	-0,025320	0
1	SC8 NL	-10700,00	NonStatic	Max	0	0	0	0	-0,027672	0
1	SC9 NL	-10900,00	NonStatic	Max	0	0	0	0	-0,032375	0
1	SC10 NL	-11100,00	NonStatic	Max	0	0	0	0	-0,037078	0
1	SC11 NL	-11400,00	NonStatic	Max	0	0	0	0	-0,044133	0
2	SC NL	-50,00	NonStatic	Max	0	0	0	0	0,011484	0
2	SC2 NL	-5,00	NonStatic	Max	0	0	0	0	0,011484	0
2	SC3 NL	0,00	NonStatic	Max	0	0	0	0	0,011484	0
2	SC4 NL	5,00	NonStatic	Max	0	0	0	0	0,011484	0
2	SC5 NL	10,00	NonStatic	Max	0	0	0	0	0,011484	0
2	SC6 NL	15,00	NonStatic	Max	0	0	0	0	0,011484	0
2	SC7 NL	50,00	NonStatic	Max	0	0	0	0	0,011484	0
2	SC8 NL	100,00	NonStatic	Max	0	0	0	0	0,011484	0
2	SC9 NL	200,00	NonStatic	Max	0	0	0	0	0,011484	0
2	SC10 NL	300,00	NonStatic	Max	0	0	0	0	0,011484	0
2	SC11 NL	450,00	NonStatic	Max	0	0	0	0	0,011484	0

Tabla IV.12: SAP2000: Giros plásticos , $M_y=10500.00$ [tonf-cm], $P=0$ [tonf]

Frame	Output Case	StepType	GenHinge	P [tonf]	M3 [tonf-cm]	U1plastic [cm]	U2plastic [cm]	U3plastic [cm]	R1plastic [rad]	R2plastic [rad]	R3plastic [rad]
2	SC NL	Max	2H1	0	-10400,00	0	0	0	0	0	0,000000
2	SC2 NL	Max	2H1	0	-10490,00	0	0	0	0	0	0,000000
2	SC3 NL	Max	2H1	0	-10500,00	0	0	0	0	0	0,000000
2	SC4 NL	Max	2H1	0	-10510,00	0	0	0	0	0	-0,000219
2	SC5 NL	Max	2H1	0	-10520,00	0	0	0	0	0	-0,000437
2	SC6 NL	Max	2H1	0	-10530,00	0	0	0	0	0	-0,000656
2	SC7 NL	Max	2H1	0	-10600,00	0	0	0	0	0	-0,002187
2	SC8 NL	Max	2H1	0	-10700,00	0	0	0	0	0	-0,004375
2	SC9 NL	Max	2H1	0	-10900,00	0	0	0	0	0	-0,008750
2	SC10 NL	Max	2H1	0	-11100,00	0	0	0	0	0	-0,013125
2	SC11 NL	Max	2H1	0	-11400,00	0	0	0	0	0	-0,019687
2	SC NL	Max	2H2	0	-50,00	0	0	0	0	0	0,000000
2	SC2 NL	Max	2H2	0	-5,00	0	0	0	0	0	0,000000
2	SC3 NL	Max	2H2	0	0,00	0	0	0	0	0	0,000000
2	SC4 NL	Max	2H2	0	5,00	0	0	0	0	0	0,000000
2	SC5 NL	Max	2H2	0	10,00	0	0	0	0	0	0,000000
2	SC6 NL	Max	2H2	0	15,00	0	0	0	0	0	0,000000
2	SC7 NL	Max	2H2	0	50,00	0	0	0	0	0	0,000000
2	SC8 NL	Max	2H2	0	100,00	0	0	0	0	0	0,000000
2	SC9 NL	Max	2H2	0	200,00	0	0	0	0	0	0,000000
2	SC10 NL	Max	2H2	0	300,00	0	0	0	0	0	0,000000
2	SC11 NL	Max	2H2	0	450,00	0	0	0	0	0	0,000000

Al comparar los giros (plásticos “ v_p ”, elásticos “ v_e ” y totales “ v ”) obtenidos en el modelo de SAP2000, con los giros impuestos en los ejemplos en Excel se observa que las diferencias porcentuales obtenidos son menores a 0,5% (ver Tabla IV.13).

Tabla IV.13: Calculo Analítico vs SAP2000: Resumen de momentos y giros, $M_y=10500.00$ [tonf-cm], $P=0$ [tonf]

		q(2) [tonf-cm]	vp(2)ITER [rad]	ve(2)ITER [rad]	v(2)ITER [rad]	vp(2)SAP2K [rad]	ve(2)SAP2K [rad]	v(2)SAP2K [rad]	dif vp %	dif ve %	dif v %
P	0,00	10400,00	0,000000	0,022805	0,022805	0,000000	0,022805	0,022805	0,00	0,00	0,00
My	10400,00	-50,00	0,000000	0,011484	0,011484	0,000000	0,011484	0,011484	0,00	0,00	0,00
P	0,00	10490,00	0,000000	0,022952	0,022952	0,000000	0,022952	0,022952	0,00	0,00	0,00
My	10490,00	-5,00	0,000000	0,011484	0,011484	0,000000	0,011484	0,011484	0,00	0,00	0,00
P	0,00	10500,00	0,000000	0,022969	0,022969	0,000000	0,022969	0,022969	0,00	0,00	0,00
My	10500,00	0,00	0,000000	0,011484	0,011484	0,000000	0,011484	0,011484	0,00	0,00	0,00
P	0,00	10510,00	0,000219	0,022985	0,023204	0,000219	0,022985	0,023204	0,00	0,00	0,00
My	10510,00	5,00	0,000000	0,011484	0,011484	0,000000	0,011484	0,011484	0,00	0,00	0,00
P	0,00	10520,00	0,000438	0,023002	0,023439	0,000437	0,023002	0,023439	-0,23	0,00	0,00
My	10520,00	10,00	0,000000	0,011484	0,011484	0,000000	0,011484	0,011484	0,00	0,00	0,00
P	0,00	10530,00	0,000656	0,023018	0,023674	0,000656	0,023018	0,023674	0,00	0,00	0,00
My	10530,00	15,00	0,000000	0,011484	0,011484	0,000000	0,011484	0,011484	0,00	0,00	0,00
P	0,00	10600,00	0,002188	0,023133	0,025320	0,002187	0,023133	0,025320	-0,05	0,00	0,00
My	10600,00	50,00	0,000000	0,011484	0,011484	0,000000	0,011484	0,011484	0,00	0,00	0,00
P	0,00	10700,00	0,004375	0,023297	0,027672	0,004375	0,023297	0,027672	0,00	0,00	0,00
My	10700,00	100,00	0,000000	0,011484	0,011484	0,000000	0,011484	0,011484	0,00	0,00	0,00
P	0,00	10900,00	0,008750	0,023625	0,032375	0,008750	0,023625	0,032375	0,00	0,00	0,00
My	10900,00	200,00	0,000000	0,011484	0,011484	0,000000	0,011484	0,011484	0,00	0,00	0,00
P	0,00	11100,00	0,013125	0,023953	0,037078	0,013125	0,023953	0,037078	0,00	0,00	0,00
My	11100,00	300,00	0,000000	0,011484	0,011484	0,000000	0,011484	0,011484	0,00	0,00	0,00
P	0,00	11400,00	0,019688	0,024445	0,044133	0,019687	0,024445	0,044133	-0,01	0,00	0,00
My	11400,00	450,00	0,000000	0,011484	0,011484	0,000000	0,011484	0,011484	0,00	0,00	0,00

Para el caso de $P=0$ [tonf] y $M_y=10500.00$ [tonf-cm] se grafican (ver Figura IV.7) los giros plásticos y elásticos, obtenidos en SAP2000 (**ve1SAP2K**; **vp1SAP2K**) y los definidos para Calculo Analítico (**ve1**; **vp1**), respecto de los momentos $M_y+\Delta M$. Se observa que la trayectoria de los giros plásticos y elásticos es prácticamente idéntica entre ambas metodologías.

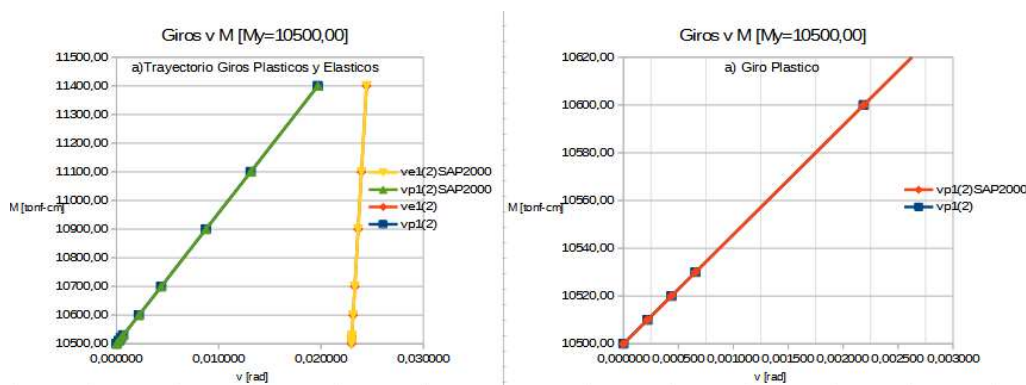


Figura IV.7: Momentos vs Giros , $P=0$ [tonf] y $M_y=10500.00$ [tonf-cm]

En las tablas IV.14 a I.V19, se presentan los resultados para cargas las axiales $\{50;10;150;200;250;300\}$ con sus respectivos momentos. Los giros plásticos obtenidos a través de los modelos SAP2000 resultaron menores que los calculados en Excel. La comparación directa de los giros obtenidos en cada procedimiento, muestra diferencias entre -4% hasta 100%,. En cambio, el comportamiento elástico calculado mediante ambas metodologías, es idéntico.

Cuando se revisa el estado de carga, $P=50$ [tonf] y $M=10181,87$ [tonf-cm] (Ver tabla IV.14), donde M es ligeramente mayor a M_y , el análisis en Excel entrega como resultado un giro plástico de $v_p=0,000219$ rad, en cambio con el modelo SAP2000, el giro plástico en ambos extremos es nulo. La plastificación de las rotulas en el modelo SAP2000 comienza carga, $P=50$ [tonf] y $M=10191,87$ [tonf-cm]. La diferencia entre los giros obtenidos por el modelo matricial vs SAP2000, es más evidente a medida que se incrementa la carga axial, tal como se observa en tabla IV.19, para $P=300$ [tonf] y $M=8541,25$ [tonf-cm]. El análisis en Excel entrega un giro plástico $v_p=0,000219$ [rad], el modelo SAP2000 la activación de la rótula plástica ocurre, para $P=300$ [tonf] y $M=8631,25$ [tonf-cm], con un giro de $v_p=0,000695$ [rad].

Tabla IV.14: Calculo Analítico vs SAP2000: Resumen de momentos y giros, $M_y=10171.87$ [tonf-cm], $P=50$ [tonf]

		q(2) [tonf-cm]	vp(2)ITER [rad]	ve(2)ITER [rad]	v(2)ITER [rad]	vp(2)SAP2K [rad]	ve(2)SAP2K [rad]	v(2)SAP2K [rad]	dif vp %	dif ve %	dif v %
Pn	50,00	10071,87	0,000000	0,022087	0,022087	0,000000	0,022087	0,022087	0,00	0,00	0,00
Mn	10071,87	-50,00	0,000000	0,011125	0,011125	0,000000	0,011125	0,011125	0,00	0,00	0,00
Pn	50,00	10161,87	0,000000	0,022235	0,022235	0,000000	0,022235	0,022235	0,00	0,00	0,00
Mn	10161,87	-5,00	0,000000	0,011125	0,011125	0,000000	0,011125	0,011125	0,00	0,00	0,00
Pn	50,00	10171,87	0,000000	0,022251	0,022251	0,000000	0,022251	0,022251	0,00	0,00	0,00
Mn	10171,87	0,00	0,000000	0,011125	0,011125	0,000000	0,011125	0,011125	0,00	0,00	0,00
Pn	50,00	10181,87	0,000219	0,022267	0,022486	0,000000	0,022267	0,022267	-100,00	0,00	-0,97
Mn	10181,87	5,00	0,000000	0,011125	0,011125	0,000000	0,011125	0,011125	0,00	0,00	0,00
Pn	50,00	10191,87	0,000437	0,022284	0,022721	0,000127	0,022284	0,022411	-70,94	0,00	-1,36
Mn	10191,87	10,00	0,000000	0,011125	0,011125	0,000000	0,011125	0,011125	0,00	0,00	0,00
Pn	50,00	10201,87	0,000656	0,022300	0,022956	0,000339	0,022300	0,022639	-48,32	0,00	-1,38
Mn	10201,87	15,00	0,000000	0,011125	0,011125	0,000000	0,011125	0,011125	0,00	0,00	0,00
Pn	50,00	10271,87	0,002187	0,022415	0,024602	0,001822	0,022415	0,024237	-16,69	0,00	-1,48
Mn	10271,87	50,00	0,000000	0,011125	0,011125	0,000000	0,011125	0,011125	0,00	0,00	0,00
Pn	50,00	10371,87	0,004375	0,022579	0,026954	0,003942	0,022579	0,026521	-9,90	0,00	-1,61
Mn	10371,87	100,00	0,000000	0,011125	0,011125	0,000000	0,011125	0,011125	0,00	0,00	0,00
Pn	50,00	10571,87	0,008750	0,022907	0,031657	0,008186	0,022907	0,031093	-6,45	0,00	-1,78
Mn	10571,87	200,00	0,000000	0,011125	0,011125	0,000000	0,011125	0,011125	0,00	0,00	0,00
Pn	50,00	10771,87	0,013125	0,023235	0,036360	0,012434	0,023235	0,035669	-5,26	0,00	-1,90
Mn	10771,87	300,00	0,000000	0,011125	0,011125	0,000000	0,011125	0,011125	0,00	0,00	0,00
Pn	50,00	11071,87	0,019687	0,023728	0,043415	0,018814	0,023728	0,042541	-4,43	0,00	-2,01
Mn	11071,87	450,00	0,000000	0,011125	0,011125	0,000000	0,011125	0,011125	0,00	0,00	0,00

Tabla IV.15: Calculo Analítico vs SAP2000: Resumen de momentos y giros, $M_y=9843,75$ [tonf-cm], $P=100$ [tonf]

		q(2) [tonf-cm]	vp(2)ITER [rad]	ve(2)ITER [rad]	v(2)ITER [rad]	vp(2)SAP2K [rad]	ve(2)SAP2K [rad]	v(2)SAP2K [rad]	dif vp %	dif ve %	dif v %
Pn	100,00	9743,75	0,000000	0,021369	0,021369	0,000000	0,021369	0,021369	0,00	0,00	0,00
Mn	9743,75	-50,00	0,000000	0,010767	0,010767	0,000000	0,010767	0,010767	0,00	0,00	0,00
Pn	100,00	9833,75	0,000000	0,021517	0,021517	0,000000	0,021517	0,021517	0,00	0,00	0,00
Mn	9833,75	-5,00	0,000000	0,010767	0,010767	0,000000	0,010767	0,010767	0,00	0,00	0,00
Pn	100,00	9843,75	0,000000	0,021533	0,021533	0,000000	0,021533	0,021533	0,00	0,00	0,00
Mn	9843,75	0,00	0,000000	0,010767	0,010767	0,000000	0,010767	0,010767	0,00	0,00	0,00
Pn	100,00	9853,75	0,000219	0,021550	0,021768	0,000000	0,021550	0,021550	-100,00	0,00	-1,00
Mn	9853,75	5,00	0,000000	0,010767	0,010767	0,000000	0,010767	0,010767	0,00	0,00	0,00
Pn	100,00	9863,75	0,000438	0,021566	0,022004	0,000000	0,021566	0,021566	-100,00	0,00	-1,99
Mn	9863,75	10,00	0,000000	0,010767	0,010767	0,000000	0,010767	0,010767	0,00	0,00	0,00
Pn	100,00	9873,75	0,000656	0,021582	0,022239	0,000128	0,021582	0,021711	-80,49	0,00	-2,37
Mn	9873,75	15,00	0,000000	0,010767	0,010767	0,000000	0,010767	0,010767	0,00	0,00	0,00
Pn	100,00	9943,75	0,002188	0,021697	0,023885	0,001564	0,021697	0,023261	-28,52	0,00	-2,61
Mn	9943,75	50,00	0,000000	0,010767	0,010767	0,000000	0,010767	0,010767	0,00	0,00	0,00
Pn	100,00	10043,75	0,004375	0,021861	0,026236	0,003617	0,021861	0,025478	-17,33	0,00	-2,89
Mn	10043,75	100,00	0,000000	0,010767	0,010767	0,000000	0,010767	0,010767	0,00	0,00	0,00
Pn	100,00	10243,75	0,008750	0,022189	0,030939	0,007730	0,022189	0,029920	-11,66	0,00	-3,29
Mn	10243,75	200,00	0,000000	0,010767	0,010767	0,000000	0,010767	0,010767	0,00	0,00	0,00
Pn	100,00	10443,75	0,013125	0,022518	0,035643	0,011853	0,022518	0,034370	-9,69	0,00	-3,57
Mn	10443,75	300,00	0,000000	0,010767	0,010767	0,000000	0,010767	0,010767	0,00	0,00	0,00
Pn	100,00	10743,75	0,019688	0,023010	0,042697	0,018052	0,023010	0,041062	-8,31	0,00	-3,83
Mn	10743,75	450,00	0,000000	0,010767	0,010767	0,000000	0,010767	0,010767	0,00	0,00	0,00

Tabla IV.16: Calculo Analítico vs SAP2000: Resumen de momentos y giros, $M_y=9515,62$ [tonf-cm], $P=150$ [tonf]

		q(2) [tonf-cm]	vp(2)ITER [rad]	ve(2)ITER [rad]	v(2)ITER [rad]	vp(2)SAP2K [rad]	ve(2)SAP2K [rad]	v(2)SAP2K [rad]	dif vp %	dif ve %	dif v %
Pn	150,00	9415,62	0,000000	0,020651	0,020651	0,000000	0,020651	0,020651	0,00	0,00	0,00
Mn	9415,62	-50,00	0,000000	0,010408	0,010408	0,000000	0,010408	0,010408	0,00	0,00	0,00
Pn	150,00	9505,62	0,000000	0,020799	0,020799	0,000000	0,020799	0,020799	0,00	0,00	0,00
Mn	9505,62	-5,00	0,000000	0,010408	0,010408	0,000000	0,010408	0,010408	0,00	0,00	0,00
Pn	150,00	9515,62	0,000000	0,020815	0,020815	0,000000	0,020815	0,020815	0,00	0,00	0,00
Mn	9515,62	0,00	0,000000	0,010408	0,010408	0,000000	0,010408	0,010408	0,00	0,00	0,00
Pn	150,00	9525,62	0,000219	0,020832	0,021051	0,000000	0,020832	0,020832	-100,00	0,00	-1,04
Mn	9525,62	5,00	0,000000	0,010408	0,010408	0,000000	0,010408	0,010408	0,00	0,00	0,00
Pn	150,00	9535,62	0,000437	0,020848	0,021286	0,000000	0,020848	0,020848	-100,00	0,00	-2,06
Mn	9535,62	10,00	0,000000	0,010408	0,010408	0,000000	0,010408	0,010408	0,00	0,00	0,00
Pn	150,00	9545,62	0,000656	0,020865	0,021521	0,000000	0,020865	0,020865	-100,00	0,00	-3,05
Mn	9545,62	15,00	0,000000	0,010408	0,010408	0,000000	0,010408	0,010408	0,00	0,00	0,00
Pn	150,00	9615,62	0,002187	0,020979	0,023167	0,001319	0,020979	0,022298	-39,69	0,00	-3,75
Mn	9615,62	50,00	0,000000	0,010408	0,010408	0,000000	0,010408	0,010408	0,00	0,00	0,00
Pn	150,00	9715,62	0,004375	0,021144	0,025518	0,003305	0,021144	0,024448	-24,46	0,00	-4,19
Mn	9715,62	100,00	0,000000	0,010408	0,010408	0,000000	0,010408	0,010408	0,00	0,00	0,00
Pn	150,00	9915,62	0,008750	0,021472	0,030222	0,007287	0,021472	0,028759	-16,72	0,00	-4,84
Mn	9915,62	200,00	0,000000	0,010408	0,010408	0,000000	0,010408	0,010408	0,00	0,00	0,00
Pn	150,00	10115,62	0,013125	0,021800	0,034925	0,011284	0,021800	0,033083	-14,03	0,00	-5,27
Mn	10115,62	300,00	0,000000	0,010408	0,010408	0,000000	0,010408	0,010408	0,00	0,00	0,00
Pn	150,00	10415,62	0,019687	0,022292	0,041979	0,017302	0,022292	0,039594	-12,11	0,00	-5,68
Mn	10415,62	450,00	0,000000	0,010408	0,010408	0,000000	0,010408	0,010408	0,00	0,00	0,00

Tabla IV.17: Calculo Analítico vs SAP2000: Resumen de momentos y giros, $M_y=9187,50$ [tonf-cm], $P=200$ [tonf]

		q(2) [tonf-cm]	vp(2)ITER [rad]	ve(2)ITER [rad]	v(2)ITER [rad]	vp(2)SAP2K [rad]	ve(2)SAP2K [rad]	v(2)SAP2K [rad]	dif vp %	dif ve %	dif v %
Pn	200,00	9087,50	0,000000	0,019934	0,019934	0,000000	0,019934	0,019934	0,00	0,00	0,00
Mn	9087,50	-50,00	0,000000	0,010049	0,010049	0,000000	0,010049	0,010049	0,00	0,00	0,00
Pn	200,00	9177,50	0,000000	0,020081	0,020081	0,000000	0,020081	0,020081	0,00	0,00	0,00
Mn	9177,50	-5,00	0,000000	0,010049	0,010049	0,000000	0,010049	0,010049	0,00	0,00	0,00
Pn	200,00	9187,50	0,000000	0,020098	0,020098	0,000000	0,020098	0,020098	0,00	0,00	0,00
Mn	9187,50	0,00	0,000000	0,010049	0,010049	0,000000	0,010049	0,010049	0,00	0,00	0,00
Pn	200,00	9197,50	0,000219	0,020114	0,020333	0,000000	0,020114	0,020114	-100,00	0,00	-1,08
Mn	9197,50	5,00	0,000000	0,010049	0,010049	0,000000	0,010049	0,010049	0,00	0,00	0,00
Pn	200,00	9207,50	0,000438	0,020130	0,020568	0,000000	0,020130	0,020130	-100,00	0,00	-2,13
Mn	9207,50	10,00	0,000000	0,010049	0,010049	0,000000	0,010049	0,010049	0,00	0,00	0,00
Pn	200,00	9217,50	0,000656	0,020147	0,020803	0,000000	0,020147	0,020147	-100,00	0,00	-3,15
Mn	9217,50	15,00	0,000000	0,010049	0,010049	0,000000	0,010049	0,010049	0,00	0,00	0,00
Pn	200,00	9287,50	0,002188	0,020262	0,022449	0,001087	0,020262	0,021348	-50,32	0,00	-4,90
Mn	9287,50	50,00	0,000000	0,010049	0,010049	0,000000	0,010049	0,010049	0,00	0,00	0,00
Pn	200,00	9387,50	0,004375	0,020426	0,024801	0,003005	0,020426	0,023431	-31,31	0,00	-5,52
Mn	9387,50	100,00	0,000000	0,010049	0,010049	0,000000	0,010049	0,010049	0,00	0,00	0,00
Pn	200,00	9587,50	0,008750	0,020754	0,029504	0,006857	0,020754	0,027611	-21,63	0,00	-6,42
Mn	9587,50	200,00	0,000000	0,010049	0,010049	0,000000	0,010049	0,010049	0,00	0,00	0,00
Pn	200,00	9787,50	0,013125	0,021082	0,034207	0,010727	0,021082	0,031809	-18,27	0,00	-7,01
Mn	9787,50	300,00	0,000000	0,010049	0,010049	0,000000	0,010049	0,010049	0,00	0,00	0,00
Pn	200,00	10087,50	0,019688	0,021574	0,041262	0,016564	0,021574	0,038139	-15,87	0,00	-7,57
Mn	10087,50	450,00	0,000000	0,010049	0,010049	0,000000	0,010049	0,010049	0,00	0,00	0,00

Tabla IV.18: Calculo Analítico vs SAP2000: Resumen de momentos y giros , $M_y=8859,37$ [tonf-cm], $P=250$ [tonf]

		q(2) [tonf-cm]	vp(2)ITER [rad]	ve(2)ITER [rad]	v(2)ITER [rad]	vp(2)SAP2K [rad]	ve(2)SAP2K [rad]	v(2)SAP2K [rad]	dif vp %	dif ve %	dif v %
Pn	250,00	8759,37	0,000000	0,019216	0,019216	0,000000	0,019216	0,019216	0,00	0,00	0,00
Mn	8759,37	-50,00	0,000000	0,009690	0,009690	0,000000	0,009690	0,009690	0,00	0,00	0,00
Pn	250,00	8849,37	0,000000	0,019363	0,019363	0,000000	0,019363	0,019363	0,00	0,00	0,00
Mn	8849,37	-5,00	0,000000	0,009690	0,009690	0,000000	0,009690	0,009690	0,00	0,00	0,00
Pn	250,00	8859,37	0,000000	0,019380	0,019380	0,000000	0,019380	0,019380	0,00	0,00	0,00
Mn	8859,37	0,00	0,000000	0,009690	0,009690	0,000000	0,009690	0,009690	0,00	0,00	0,00
Pn	250,00	8869,37	0,000219	0,019396	0,019615	0,000000	0,019396	0,019396	-100,00	0,00	-1,12
Mn	8869,37	5,00	0,000000	0,009690	0,009690	0,000000	0,009690	0,009690	0,00	0,00	0,00
Pn	250,00	8879,37	0,000437	0,019413	0,019850	0,000000	0,019413	0,019413	-100,00	0,00	-2,20
Mn	8879,37	10,00	0,000000	0,009690	0,009690	0,000000	0,009690	0,009690	0,00	0,00	0,00
Pn	250,00	8889,37	0,000656	0,019429	0,020085	0,000000	0,019429	0,019429	-100,00	0,00	-3,27
Mn	8889,37	15,00	0,000000	0,009690	0,009690	0,000000	0,009690	0,009690	0,00	0,00	0,00
Pn	250,00	8959,37	0,002187	0,019544	0,021731	0,000873	0,019544	0,020417	-60,08	0,00	-6,05
Mn	8959,37	50,00	0,000000	0,009690	0,009690	0,000000	0,009690	0,009690	0,00	0,00	0,00
Pn	250,00	9059,37	0,004375	0,019708	0,024083	0,002723	0,019708	0,022431	-37,76	0,00	-6,86
Mn	9059,37	100,00	0,000000	0,009690	0,009690	0,000000	0,009690	0,009690	0,00	0,00	0,00
Pn	250,00	9259,37	0,008750	0,020036	0,028786	0,006440	0,020036	0,026476	-26,40	0,00	-8,02
Mn	9259,37	200,00	0,000000	0,009690	0,009690	0,000000	0,009690	0,009690	0,00	0,00	0,00
Pn	250,00	9459,37	0,013125	0,020364	0,033489	0,010182	0,020364	0,030546	-22,42	0,00	-8,79
Mn	9459,37	300,00	0,000000	0,009690	0,009690	0,000000	0,009690	0,009690	0,00	0,00	0,00
Pn	250,00	9759,37	0,019687	0,020856	0,040544	0,015838	0,020856	0,036694	-19,55	0,00	-9,50
Mn	9759,37	450,00	0,000000	0,009690	0,009690	0,000000	0,009690	0,009690	0,00	0,00	0,00

Tabla IV.19: Calculo Analítico vs SAP2000: Resumen de momentos y giros, $M_y=8531,25$ [tonf-cm], $P=300$ [tonf]

		q(2) [tonf-cm]	vp(2)ITER [rad]	ve(2)ITER [rad]	v(2)ITER [rad]	vp(2)SAP2K [rad]	ve(2)SAP2K [rad]	v(2)SAP2K [rad]	dif vp %	dif ve %	dif v %
Pn	300,00	8431,25	0,000000	0,018498	0,018498	0,000000	0,018498	0,018498	0,00	0,00	0,00
Mn	8431,25	-50,00	0,000000	0,009331	0,009331	0,000000	0,009331	0,009331	0,00	0,00	0,00
Pn	300,00	8521,25	0,000000	0,018646	0,018646	0,000000	0,018646	0,018646	0,00	0,00	0,00
Mn	8521,25	-5,00	0,000000	0,009331	0,009331	0,000000	0,009331	0,009331	0,00	0,00	0,00
Pn	300,00	8531,25	0,000000	0,018662	0,018662	0,000000	0,018662	0,018662	0,00	0,00	0,00
Mn	8531,25	0,00	0,000000	0,009331	0,009331	0,000000	0,009331	0,009331	0,00	0,00	0,00
Pn	300,00	8541,25	0,000219	0,018679	0,018897	0,000000	0,018679	0,018679	-100,00	0,00	-1,15
Mn	8541,25	5,00	0,000000	0,009331	0,009331	0,000000	0,009331	0,009331	0,00	0,00	0,00
Pn	300,00	8551,25	0,000438	0,018695	0,019133	0,000000	0,018695	0,018695	-100,00	0,00	-2,29
Mn	8551,25	10,00	0,000000	0,009331	0,009331	0,000000	0,009331	0,009331	0,00	0,00	0,00
Pn	300,00	8561,25	0,000656	0,018711	0,019368	0,000000	0,018711	0,018711	-100,00	0,00	-3,39
Mn	8561,25	15,00	0,000000	0,009331	0,009331	0,000000	0,009331	0,009331	0,00	0,00	0,00
Pn	300,00	8631,25	0,002188	0,018826	0,021014	0,000695	0,018826	0,019521	-68,24	0,00	-7,10
Mn	8631,25	50,00	0,000000	0,009331	0,009331	0,000000	0,009331	0,009331	0,00	0,00	0,00
Pn	300,00	8731,25	0,004375	0,018990	0,023365	0,002476	0,018990	0,021466	-43,41	0,00	-8,13
Mn	8731,25	100,00	0,000000	0,009331	0,009331	0,000000	0,009331	0,009331	0,00	0,00	0,00
Pn	300,00	8931,25	0,008750	0,019318	0,028068	0,006061	0,019318	0,025379	-30,73	0,00	-9,58
Mn	8931,25	200,00	0,000000	0,009331	0,009331	0,000000	0,009331	0,009331	0,00	0,00	0,00
Pn	300,00	9131,25	0,013125	0,019646	0,032772	0,009674	0,019646	0,029321	-26,29	0,00	-10,53
Mn	9131,25	300,00	0,000000	0,009331	0,009331	0,000000	0,009331	0,009331	0,00	0,00	0,00
Pn	300,00	9431,25	0,019688	0,020139	0,039826	0,015144	0,020139	0,035282	-23,08	0,00	-11,41
Mn	9431,25	450,00	0,000000	0,009331	0,009331	0,000000	0,009331	0,009331	0,00	0,00	0,00

Las figuras IV.8 a IV.13, muestran la trayectoria (línea verde y roja) de los giros obtenido en SAP2000, al comparara con las trayectorias con los giros obtenidos en Excel, las pendientes (rigidez) y momentos de fluencia M_y de activación de las rotulas son mayores a los definimos en Excel. El aumento de pendiente (rigidez)

entre de las trayectorias obtenidas con SAP2000, es concurrente con el incremento de carga axial en el modelo. El cálculo en Excel no considera cambios de rigidez debido a la presencia de carga axial, la rigidez de las rotulas plásticas se mantiene constante para todos los casos de carga axial analizados, como se puede observar (línea azul) en los gráficos de las Figuras IV.8 a IV.13.

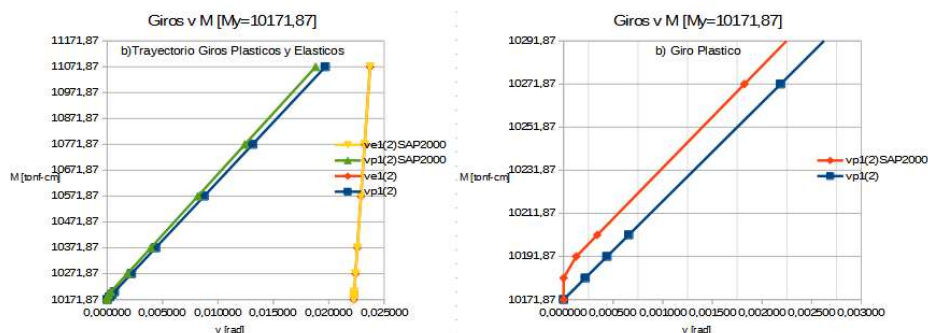


Figura IV.8: Cálculo Analítico vs SAP2000: Momentos vs Giros, $P=50$ [tonf] y $M_y=10171.87$ [tonf-cm]

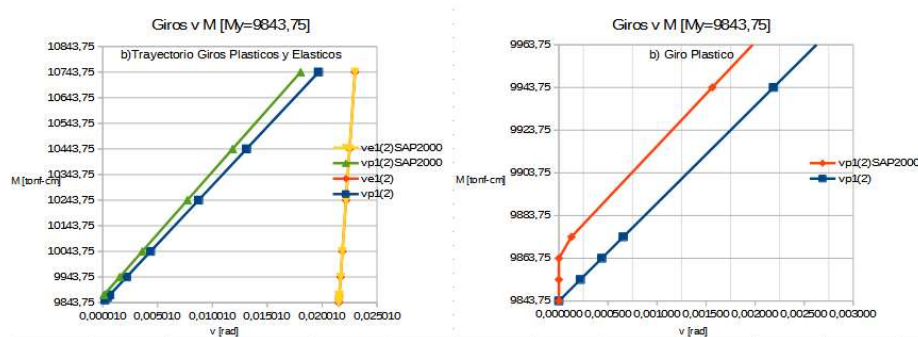


Figura IV.9: Cálculo Analítico vs SAP2000: $P=100$ [tonf] y $M_y=9843.75$ [tonf-cm]

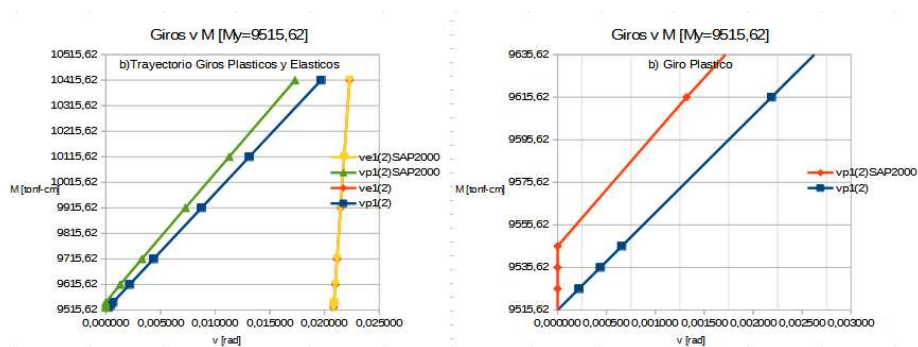


Figura IV.10: Calculo Analítico vs SAP2000: $P=150$ [tonf] y $M_y=9515,62$ [tonf-cm]

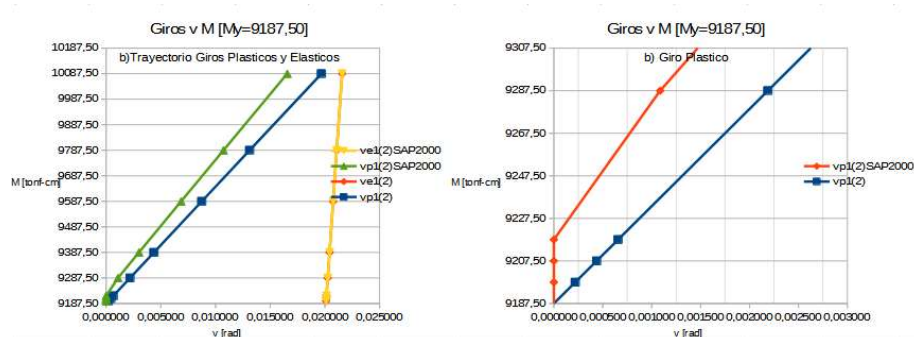


Figura IV.11: Calculo Analítico vs SAP2000: $P=200$ [tonf] y $M_y=9187,50$ [tonf-cm]

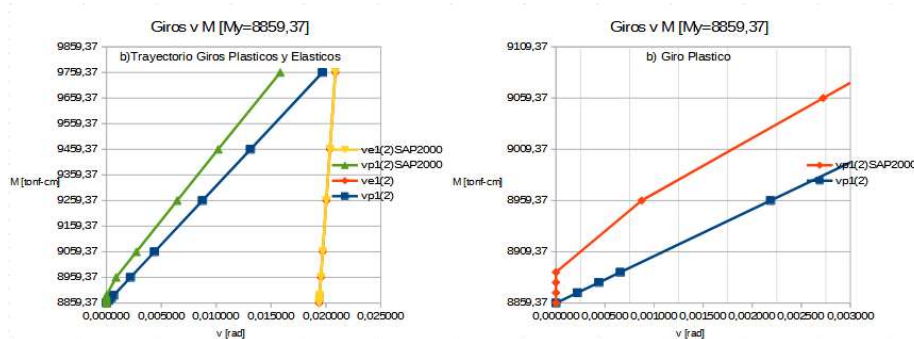


Figura IV.12: Calculo Analítico vs SAP2000: $P=250$ [tonf] y $M_y=8859,37$ [tonf-cm]

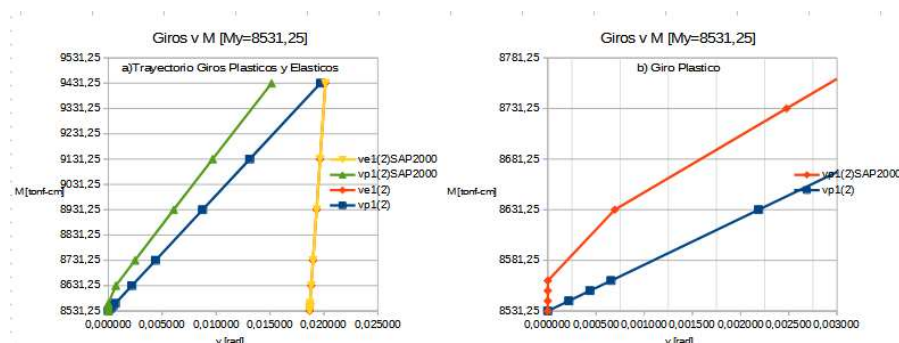


Figura IV.13: Cálculo Analítico vs SAP2000: $P=300$ [tonf] y $M_y = 8531,25$ [tonf-cm]

En tablas IV.19 a IV.25 se presenta el resultado del análisis numérico de las trayectorias de los giros plásticos obtenidos por ambos procedimientos, mediante los cuales se obtuvieron la rigidez y fluencia equivalente. Se observa un incremento de rigidez a medida que la carga axial aumenta en los resultados de SAP2000. Adicionalmente el momento de fluencia equivalente es mayor que el considerado en el análisis matricial. Salvo para el caso de carga axial $P=0$, los giros plásticos obtenidos en SAP2000, son menores, consistente con los valores de rigidez y fluencia equivalentes, es decir la activación de la rótula es posterior y gira menos debido a la mayor rigidez del sistema

Tabla IV.19: Rigidez y Fluencia equivalente, $M_y=10500.00$ [tonf-cm], $P=0$ [tonf]

ref	M [tonf-cm]	vp1(2) [rad]	ve1(2) [rad]	v1(2) [rad]	vp1(2)SAP2K [rad]	ve1(2)SAP2K [rad]	v1(2)SAP2K [rad]
My-100	10400,00	0,000000	0,022805	0,022805	0,000000	0,022805	0,022805
My-10	10490,00	0,000000	0,022952	0,022952	0,000000	0,022952	0,022952
My	10500,00	0,000000	0,022969	0,022969	0,000000	0,022969	0,022969
My+10	10510,00	0,000219	0,022985	0,023204	0,000219	0,022985	0,023204
My+20	10520,00	0,000438	0,023002	0,023439	0,000437	0,023002	0,023439
My+30	10530,00	0,000656	0,023018	0,023674	0,000656	0,023018	0,023674
My+100	10600,00	0,002188	0,023133	0,025320	0,002187	0,023133	0,025320
My+200	10700,00	0,004375	0,023297	0,027672	0,004375	0,023297	0,027672
My+400	10900,00	0,008750	0,023625	0,032375	0,008750	0,023625	0,032375
My+600	11100,00	0,013125	0,023953	0,037078	0,013125	0,023953	0,037078
My+900	11400,00	0,019688	0,024445	0,044133	0,019687	0,024445	0,044133
Slope		45714		Slope	45715		
Inter Eje Y		10500		Inter Eje Y	10500		

Tabla IV.20: Rigidez y Fluencia equivalente, $M_y = 10171.87$ [tonf-cm], $P=50$ [tonf]

ref	M [tonf-cm]	vp1(2) [rad]	ve1(2) [rad]	v1(2) [rad]	vp1(2)SAP2K [rad]	ve1(2)SAP2K [rad]	v1(2)SAP2K [rad]
My-100	10071,87	0,000000	0,022087	0,022087	0,000000	0,022087	0,022087
My-10	10161,87	0,000000	0,022235	0,022235	0,000000	0,022235	0,022235
My	10171,87	0,000000	0,022251	0,022251	0,000000	0,022251	0,022251
My+10	10181,87	0,000219	0,022267	0,022486	0,000000	0,022267	0,022267
My+20	10191,87	0,000437	0,022284	0,022721	0,000127	0,022284	0,022411
My+30	10201,87	0,000656	0,022300	0,022956	0,000339	0,022300	0,022639
My+100	10271,87	0,002187	0,022415	0,024602	0,001822	0,022415	0,024237
My+200	10371,87	0,004375	0,022579	0,026954	0,003942	0,022579	0,026521
My+400	10571,87	0,008750	0,022907	0,031657	0,008186	0,022907	0,031093
My+600	10771,87	0,013125	0,023235	0,036360	0,012434	0,023235	0,035669
My+900	11071,87	0,019687	0,023728	0,043415	0,018814	0,023728	0,042541
Slope		45714		Slope	47097		
Inter Eje Y		10172		Inter Eje Y	10186		

Tabla IV.21: Rigidez y Fluencia equivalente, $M_y = 9843,75$ [tonf-cm], $P=100$ [tonf]

ref	M [tonf-cm]	vp1(2) [rad]	ve1(2) [rad]	v1(2) [rad]	vp1(2)SAP2K [rad]	ve1(2)SAP2K [rad]	v1(2)SAP2K [rad]
My-100	9743,75	0,000000	0,021369	0,021369	0,000000	0,021369	0,021369
My-10	9833,75	0,000000	0,021517	0,021517	0,000000	0,021517	0,021517
My	9843,75	0,000000	0,021533	0,021533	0,000000	0,021533	0,021533
My+10	9853,75	0,000219	0,021550	0,021768	0,000000	0,021550	0,021550
My+20	9863,75	0,000438	0,021566	0,022004	0,000000	0,021566	0,021566
My+30	9873,75	0,000656	0,021582	0,022239	0,000128	0,021582	0,021711
My+100	9943,75	0,002188	0,021697	0,023885	0,001564	0,021697	0,023261
My+200	10043,75	0,004375	0,021861	0,026236	0,003617	0,021861	0,025478
My+400	10243,75	0,008750	0,022189	0,030939	0,007730	0,022189	0,029920
My+600	10443,75	0,013125	0,022518	0,035643	0,011853	0,022518	0,034370
My+900	10743,75	0,019688	0,023010	0,042697	0,018052	0,023010	0,041062
Slope		45714		Slope	48542		
Inter Eje Y		9844		Inter Eje Y	9868		

Tabla IV.22: Rigidez y Fluencia equivalente, $M_y = 9515,62$ [tonf-cm], $P=150$ [tonf]

ref	M [tonf-cm]	vp1(2) [rad]	ve1(2) [rad]	v1(2) [rad]	vp1(2)SAP2K [rad]	ve1(2)SAP2K [rad]	v1(2)SAP2K [rad]
My-100	9415,62	0,000000	0,020651	0,020651	0,000000	0,020651	0,020651
My-10	9505,62	0,000000	0,020799	0,020799	0,000000	0,020799	0,020799
My	9515,62	0,000000	0,020815	0,020815	0,000000	0,020815	0,020815
My+10	9525,62	0,000219	0,020832	0,021051	0,000000	0,020832	0,020832
My+20	9535,62	0,000437	0,020848	0,021286	0,000000	0,020848	0,020848
My+30	9545,62	0,000656	0,020865	0,021521	0,000000	0,020865	0,020865
My+100	9615,62	0,002187	0,020979	0,023167	0,001319	0,020979	0,022298
My+200	9715,62	0,004375	0,021144	0,025518	0,003305	0,021144	0,024448
My+400	9915,62	0,008750	0,021472	0,030222	0,007287	0,021472	0,028759
My+600	10115,62	0,013125	0,021800	0,034925	0,011284	0,021800	0,033083
My+900	10415,62	0,019687	0,022292	0,041979	0,017302	0,022292	0,039594
Slope		45714		Slope	50053		
Inter Eje Y		9516		Inter Eje Y	9550		

Tabla IV.23: Rigidez y Fluencia equivalente, $M_y=9187,50$ [tonf-cm], $P=200$ [tonf]

ref	M [tonf-cm]	vp1(2) [rad]	ve1(2) [rad]	v1(2) [rad]	vp1(2)SAP2K [rad]	ve1(2)SAP2K [rad]	v1(2)SAP2K [rad]
My-100	9087,50	0,000000	0,019934	0,019934	0,000000	0,019934	0,019934
My-10	9177,50	0,000000	0,020081	0,020081	0,000000	0,020081	0,020081
My	9187,50	0,000000	0,020098	0,020098	0,000000	0,020098	0,020098
My+10	9197,50	0,000219	0,020114	0,020333	0,000000	0,020114	0,020114
My+20	9207,50	0,000438	0,020130	0,020568	0,000000	0,020130	0,020130
My+30	9217,50	0,000656	0,020147	0,020803	0,000000	0,020147	0,020147
My+100	9287,50	0,002188	0,020262	0,022449	0,001087	0,020262	0,021348
My+200	9387,50	0,004375	0,020426	0,024801	0,003005	0,020426	0,023431
My+400	9587,50	0,008750	0,020754	0,029504	0,006857	0,020754	0,027611
My+600	9787,50	0,013125	0,021082	0,034207	0,010727	0,021082	0,031809
My+900	10087,50	0,019688	0,021574	0,041262	0,016564	0,021574	0,038139
Slope		45714	Slope		51689		
Inter Eje Y		9187	Inter Eje Y		9232		

Tabla IV.24: Rigidez y Fluencia equivalente, $M_y=8859,37$ [tonf-cm], $P=250$ [tonf]

ref	M [tonf-cm]	vp1(2) [rad]	ve1(2) [rad]	v1(2) [rad]	vp1(2)SAP2K [rad]	ve1(2)SAP2K [rad]	v1(2)SAP2K [rad]
My-100	8759,37	0,000000	0,019216	0,019216	0,000000	0,019216	0,019216
My-10	8849,37	0,000000	0,019363	0,019363	0,000000	0,019363	0,019363
My	8859,37	0,000000	0,019380	0,019380	0,000000	0,019380	0,019380
My+10	8869,37	0,000219	0,019396	0,019615	0,000000	0,019396	0,019396
My+20	8879,37	0,000437	0,019413	0,019850	0,000000	0,019413	0,019413
My+30	8889,37	0,000656	0,019429	0,020085	0,000000	0,019429	0,019429
My+100	8959,37	0,002187	0,019544	0,021731	0,000873	0,019544	0,020417
My+200	9059,37	0,004375	0,019708	0,024083	0,002723	0,019708	0,022431
My+400	9259,37	0,008750	0,020036	0,028786	0,006440	0,020036	0,026476
My+600	9459,37	0,013125	0,020364	0,033489	0,010182	0,020364	0,030546
My+900	9759,37	0,019687	0,020856	0,040544	0,015838	0,020856	0,036694
Slope		45714	Slope		53460		
Inter Eje Y		8859	Inter Eje Y		8914		

Tabla IV.25: Rigidez y Fluencia equivalente, $M_y=8531,25$ [tonf-cm], $P=300$ [tonf]

ref	M [tonf-cm]	vp1(2) [rad]	ve1(2) [rad]	v1(2) [rad]	vp1(2)SAP2K [rad]	ve1(2)SAP2K [rad]	v1(2)SAP2K [rad]
My-100	8431,25	0,000000	0,018498	0,018498	0,000000	0,018498	0,018498
My-10	8521,25	0,000000	0,018646	0,018646	0,000000	0,018646	0,018646
My	8531,25	0,000000	0,018662	0,018662	0,000000	0,018662	0,018662
My+10	8541,25	0,000219	0,018679	0,018897	0,000000	0,018679	0,018679
My+20	8551,25	0,000438	0,018695	0,019133	0,000000	0,018695	0,018695
My+30	8561,25	0,000656	0,018711	0,019368	0,000000	0,018711	0,018711
My+100	8631,25	0,002188	0,018826	0,021014	0,000695	0,018826	0,019521
My+200	8731,25	0,004375	0,018990	0,023365	0,002476	0,018990	0,021466
My+400	8931,25	0,008750	0,019318	0,028068	0,006061	0,019318	0,025379
My+600	9131,25	0,013125	0,019646	0,032772	0,009674	0,019646	0,029321
My+900	9431,25	0,019688	0,020139	0,039826	0,015144	0,020139	0,035282
Slope		45714	Slope		55367		
Inter Eje Y		8531	Inter Eje Y		8594		

En tabla IV.26 se resumen los valores de rigidez (K_{SAP2K}) y momento de fluencia ($M_{y_{SAP2K}}$) equivalente obtenidos a partir del análisis numérico de los resultados de los modelos desarrollados en SAP2000. La rigidez equivalente queda representada por la pendiente (Slope) de la recta que aproxima la trayectoria de las deformaciones y el momento de fluencia por el punto en que intercepta el eje “Y”. Se contrasto la rigidez equivalente con la rigidez plástica definida para en el ejemplo en estudio $K=45714$ [tonf-cm/rad]. Mediante la razón entre K_{sap2k}/K , se obtuvo el parámetro ajustado η^* .

Tabla IV.26: Resultados SAP2000: Análisis paramento η

A [cm]	800							
fy [tonf/cm²]	2							
Py [tonf]	1600							
Pi [tonf]	η []	My [tonf-cm]	K [tonf-cm/rad]	My_SAP2K [tonf-cm]	K_SAP2K [tonf-cm/rad]	K_SAP2K/K []	η*	Pi/Py []
0,00	0,0500	10500,00	45714	10500,01	45715	1,0000	0,0500	0,0000
50,00	0,0500	10171,87	45714	10186,06	47097	1,0302	0,0515	0,0313
100,00	0,0500	9843,75	45714	9867,99	48542	1,0618	0,0531	0,0625
150,00	0,0500	9515,62	45714	9550,22	50053	1,0949	0,0547	0,0938
200,00	0,0500	9187,50	45714	9232,18	51689	1,1307	0,0565	0,1250
250,00	0,0500	8859,37	45714	8913,86	53460	1,1694	0,0585	0,1563
300,00	0,0500	8531,25	45714	8594,20	55367	1,2112	0,0606	0,1875

Los resultados de SAP2000 muestran un endurecimiento de la rotula al aumentar la carga axial sobre el elemento viga-columna. Lo anterior puede ser representado por un incremento en el valor del parámetro η^* , respecto del valor base considerado $\eta=0.05$. Tal como se muestra en la figura IV.14 el parámetro η^* presenta una trayectoria ascendente coherente con el aumento de rigidez.

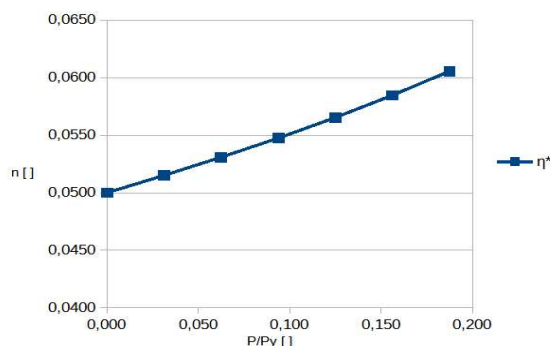


Figura IV.14: SAP2000: Relación entre η^* y Carga Axial

Adicionalmente, a partir del análisis numérico de las trayectorias de los giros plásticos, se observa un cambio en el punto de fluencia inicial. En Tabla IV.27 es posible observar que el momento de fluencia equivalente tienen valores ligeramente superiores (menos de 1%) respecto de los valores base considerados en la parametrización de la rotula plástica (Ver Tabla IV.19). Desde la perspectiva de la interacción entre la carga axial y momento de flexión, este ajuste en el momento de fluencia viene acompañado de una carga axial concomitante reducida. Debido a que el comportamiento de las rotulas no es perfectamente plástico, cuando la sección comienza a plastificar, el momento en la rotula se incrementa. Para alcanzar el estado de carga objetivo ($\mathbf{P}$; $\mathbf{M}_y + \Delta \mathbf{M}$), se infiere de los resultados obtenidos en SAP2000, que se transita desde un punto ubicado en el diagrama de interacción de menor carga axial y mayor momento de fluencia tal como se esquematiza en Figura IV.15.

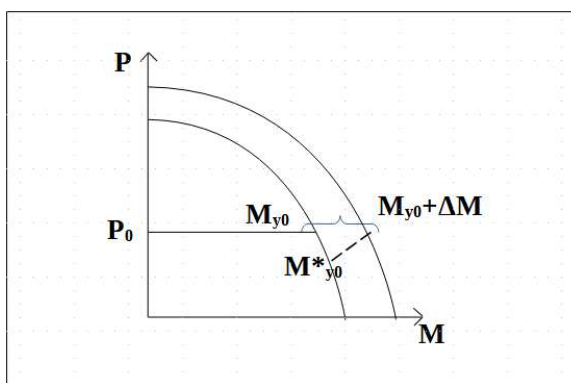


Figura IV.15: Trayectoria Diagrama de Interacción

Tabla IV.27: Cargas Ajustadas Diagrama Interacción

My [tonf-cm]	Pi [tonf]	My* [tonf-cm]	Pi* [tonf]
10500,00	0,00	10500,01	0,00
10171,87	50,00	10186,06	47,84
9843,75	100,00	9867,99	96,31
9515,62	150,00	9550,22	144,73
9187,50	200,00	9232,18	193,19
8859,37	250,00	8913,86	241,70
8531,25	300,00	8594,20	290,41

• CONCLUSIONES

Los elementos tipo viga-columna con plasticidad concentrada son adecuados para modelar elementos en que se espera plastificación restringida solo en los extremos del elemento. En este trabajo se resuelven ejemplos de elementos viga-columna con carga axial utilizando Excel y se comparan estos resultados con SAP2000 con el objetivo de validar el elemento viga-columna de dicho programa. Mediante el cálculo en Excel fue posible determinar los giros totales que generan activación de las rotulas plásticas, con un grado de precisión elevado (error residual =0). El contraste de estos resultados se consiguió con SAP2000, a través un modelo complementario para determinar los giros producto de los momentos externos aplicados en los extremos del modelo. Las diferencia entre los resultados obtenidos por ambas metodologías fueron inferiores 0.5%. para modelos sin carga axial.

El análisis no lineal de elementos viga-columna con plasticidad concentrada, sometidos a carga axial, se abordó en los puntos IV1 y IV2. Los ejemplos utilizando Excel se solucionaron aplicando directamente calculo analítico. Para la selección de las cargas axiales y momentos de flexión, se utilizo el diagrama de interacción derivado de la geometría de sección y propiedades mecánicas del material. Las curvas momento-rotación de las rotulas fueron definidas a partir del momento de fluencia seleccionado en el diagrama de interacción y considerando $\eta = 0.05$, para todos los casos. A partir del análisis numéricos realizado a las trayectorias de giros obtenidas en SAP2000, se estimaron parámetros equivalentes de momento de fluencia, rigidez equivalente y parámetro η^* ajustado, , para cada nivel de carga axial. El cambio de rigidez observado, viene acompañado de un menor giro plástico máximo en la rotulas para el mismo nivel de deformación elástica obtenido por el calculo analítico. Se concluye que la presencia de la carga axial modifica el comportamiento de la rótula en el análisis no lineal realizado con el software SAP2000

Adicionalmente, se interpreta que el cambio en el punto de fluencia inicial identificado en los modelos de SAP2000 a partir del cual se activa la rotula plástica, como un ajuste en la trayectoria de carga dentro del diagrama de interacción. Esto permitiría mantener la relación definida en el diagrama de interacción y extrapolando a combinaciones de carga axial y momento mayores al de fluencia, Cuando la sección comienza a plastificar, el momento se incrementa y por lo tanto para alcanzar el estado de carga objetivo ($P ; M_y + \Delta M$), es necesario iniciar desde un punto ubicado en el diagrama de interacción de menor carga axial y mayor momento de fluencia.

BIBLIOGRAFIA

- Filippou F. & Fenves G. (2004). Methods of Analysis for Earthquake-Resistant Structures.
- Aguilar R. (2014). Análisis Matricial de Estructuras con CEINCI-LAB.
- Bozorgnia Y, & Vitelmo V. Bertero (2004). Earthquake Engineering From Engineering Seismology to Performance-Based Engineering.
- Hube M. (2022). Apuntes IEG 3120 Capitulo 6. Elementos Tipo Viga-Columna-
- Ronald J. Purca (2014). Reglas de Modelamiento - Análisis no Lineal- Recopilación ATC-40, FEMA356
- Computers And Structures Inc. (2020). Technical Note- Parametric P-M2-M3 Hinge Model

ANEXO A : DIAGRAMA DE INTERACCION

Tabla A.1: Parámetros geométricos elemento

Datos del elemento		
B	20	cm
H	40	cm
L	700	cm
I	26666,6666666667	cm ³
I	106666,666666667	cm ⁴
E1	1000	tonf/cm ²

Propiedades Sección			
E*A	800000		tonf
E*I	106666666,7		tonf*cm ²

Tabla A.2: Parámetros Material

Propiedades Material	
ϵ	0,002 [cm/cm]
E1	1000 tonf/cm ²
f_y	2 tonf/cm ²

Tabla A.3: Geometría fibras -sección transversal

Definición fibras					
Tramos	B [cm]	H [cm]	Z [cm]	A [cm ²]	A*Z [cm ³]
1	20	5	2,5	100	250
2	20	5	7,5	100	750
3	20	5	12,5	100	1250
4	20	5	17,5	100	1750
5	20	5	22,5	100	2250
6	20	5	27,5	100	2750
7	20	5	32,5	100	3250
8	20	5	37,5	100	3750
		Zcg	20	800	16000

Tabla A.4: Fuerzas en las fibras y Carga Axial y Momento en sección transversal

C [cm]	f1 [tonf/cm ²]	f2 [tonf/cm ²]	f3 [tonf/cm ²]	f4 [tonf/cm ²]	f5 [tonf/cm ²]	f6 [tonf/cm ²]	f7 [tonf/cm ²]	f8 [tonf/cm ²]	Pn [tonf]	My [tonf-cm]	Pn/Pn_max	Mn/My_Max
-9200000	-2,00	-2,00	-2,00	-2,00	-2,00	-2,00	-2,00	-2,00	-1600,00	0,02	-1,000	0,000
-380	-1,82	-1,85	-1,87	-1,89	-1,92	-1,94	-1,96	-1,99	-1523,81	500,00	-0,952	0,048
-255	-1,75	-1,78	-1,81	-1,85	-1,88	-1,92	-1,95	-1,98	-1491,53	711,86	-0,932	0,068
-130	-1,56	-1,62	-1,68	-1,74	-1,79	-1,85	-1,91	-1,97	-1411,76	1235,29	-0,882	0,118
-5	-0,33	-0,56	-0,78	-1,00	-1,22	-1,44	-1,67	-1,89	-888,89	4666,67	-0,556	0,444
-3,75	-0,29	-0,51	-0,74	-0,97	-1,20	-1,43	-1,66	-1,89	-868,57	4800,00	-0,543	0,457
-2,5	-0,24	-0,47	-0,71	-0,94	-1,18	-1,41	-1,65	-1,88	-847,06	4941,18	-0,529	0,471
-1,25	-0,18	-0,42	-0,67	-0,91	-1,15	-1,39	-1,64	-1,88	-824,24	5090,91	-0,515	0,485
0	-0,13	-0,38	-0,63	-0,88	-1,13	-1,38	-1,63	-1,88	-800,00	5250,00	-0,500	0,500
1,25	-0,06	-0,32	-0,58	-0,84	-1,10	-1,35	-1,61	-1,87	-774,19	5419,35	-0,484	0,516
2,5	0,00	-0,27	-0,53	-0,80	-1,07	-1,33	-1,60	-1,87	-746,67	5600,00	-0,467	0,533
3,75	0,07	-0,21	-0,48	-0,76	-1,03	-1,31	-1,59	-1,86	-717,24	5793,10	-0,448	0,552
5	0,14	-0,14	-0,43	-0,71	-1,00	-1,29	-1,57	-1,86	-685,71	6000,00	-0,429	0,571
6,25	0,22	-0,07	-0,37	-0,67	-0,96	-1,26	-1,56	-1,85	-651,85	6222,22	-0,407	0,593
7,5	0,31	0,00	-0,31	-0,62	-0,92	-1,23	-1,54	-1,85	-615,38	6461,54	-0,385	0,615
8,75	0,40	0,08	-0,24	-0,56	-0,88	-1,20	-1,52	-1,84	-576,00	6720,00	-0,360	0,640
10	0,50	0,17	-0,17	-0,50	-0,83	-1,17	-1,50	-1,83	-533,33	7000,00	-0,333	0,667
11,25	0,61	0,26	-0,09	-0,43	-0,78	-1,13	-1,48	-1,83	-486,96	7304,35	-0,304	0,696
12,5	0,73	0,36	0,00	-0,36	-0,73	-1,09	-1,45	-1,82	-436,36	7636,36	-0,273	0,727
13,75	0,86	0,48	0,10	-0,29	-0,67	-1,05	-1,43	-1,81	-380,95	8000,00	-0,238	0,762
15	1,00	0,60	0,20	-0,20	-0,60	-1,00	-1,40	-1,80	-320,00	8400,00	-0,200	0,800
16,25	1,16	0,74	0,32	-0,11	-0,53	-0,95	-1,37	-1,79	-252,63	8842,11	-0,158	0,842
17,5	1,33	0,89	0,44	0,00	-0,44	-0,89	-1,33	-1,78	-177,78	9333,33	-0,111	0,889
18,75	1,53	1,06	0,59	0,12	-0,35	-0,82	-1,29	-1,76	-94,12	9882,35	-0,059	0,941
20	1,75	1,25	0,75	0,25	-0,25	-0,75	-1,25	-1,75	0,00	10500,00	0,000	1,000
21,25	1,76	1,29	0,82	0,35	-0,12	-0,59	-1,06	-1,53	94,12	9882,35	0,059	0,941
22,5	1,78	1,33	0,89	0,44	0,00	-0,44	-0,89	-1,33	177,78	9333,33	0,111	0,889
23,75	1,79	1,37	0,95	0,53	0,11	-0,32	-0,74	-1,16	252,63	8842,11	0,158	0,842
25	1,80	1,40	1,00	0,60	0,20	-0,20	-0,60	-1,00	320,00	8400,00	0,200	0,800
26,25	1,81	1,43	1,05	0,67	0,29	-0,10	-0,48	-0,86	380,95	8000,00	0,238	0,762
27,5	1,82	1,45	1,09	0,73	0,36	0,00	-0,36	-0,73	436,36	7636,36	0,273	0,727
28,75	1,83	1,48	1,13	0,78	0,43	0,09	-0,26	-0,61	486,96	7304,35	0,304	0,696
30	1,83	1,50	1,17	0,83	0,50	0,17	-0,17	-0,50	533,33	7000,00	0,333	0,667
31,25	1,84	1,52	1,20	0,88	0,56	0,24	-0,08	-0,40	576,00	6720,00	0,360	0,640
32,5	1,85	1,54	1,23	0,92	0,62	0,31	0,00	-0,31	615,38	6461,54	0,385	0,615
33,75	1,85	1,56	1,26	0,96	0,67	0,37	0,07	-0,22	651,85	6222,22	0,407	0,593
35	1,86	1,57	1,29	1,00	0,71	0,43	0,14	-0,14	685,71	6000,00	0,429	0,571
36,25	1,86	1,59	1,31	1,03	0,76	0,48	0,21	-0,07	717,24	5793,10	0,448	0,552
37,5	1,87	1,60	1,33	1,07	0,80	0,53	0,27	0,00	746,67	5600,00	0,467	0,533
38,75	1,87	1,61	1,35	1,10	0,84	0,58	0,32	0,06	774,19	5419,35	0,484	0,516
40	1,88	1,63	1,38	1,13	0,88	0,63	0,38	0,13	800,00	5250,00	0,500	0,500
41,25	1,88	1,64	1,39	1,15	0,91	0,67	0,42	0,18	824,24	5090,91	0,515	0,485
42,5	1,88	1,65	1,41	1,18	0,94	0,71	0,47	0,24	847,06	4941,18	0,529	0,471
43,75	1,89	1,66	1,43	1,20	0,97	0,74	0,51	0,29	868,57	4800,00	0,543	0,457
45	1,89	1,67	1,44	1,22	1,00	0,78	0,56	0,33	888,89	4666,67	0,556	0,444
170	1,97	1,91	1,85	1,79	1,74	1,68	1,62	1,56	1411,76	1235,29	0,882	0,118
295	1,98	1,95	1,92	1,88	1,85	1,81	1,78	1,75	1491,53	711,86	0,932	0,068
420	1,99	1,96	1,94	1,92	1,89	1,87	1,85	1,82	1523,81	500,00	0,952	0,048
9200000	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00	1600,00	0,02	1,000	0,000
MAX									1600,00	10500,00		

Se obtiene una carga axial máxima de 1600 tonf, con sus signos respectivos para compresión y tracción. Cuando la carga axial es cero, el momento máximo de fluencia es 10500 tonf-cm. En Figura A.2 se presenta el diagrama de interacción y en la Fig. A.3 se presenta el diagrama normalizado por Pmax y Mymax, respectivamente

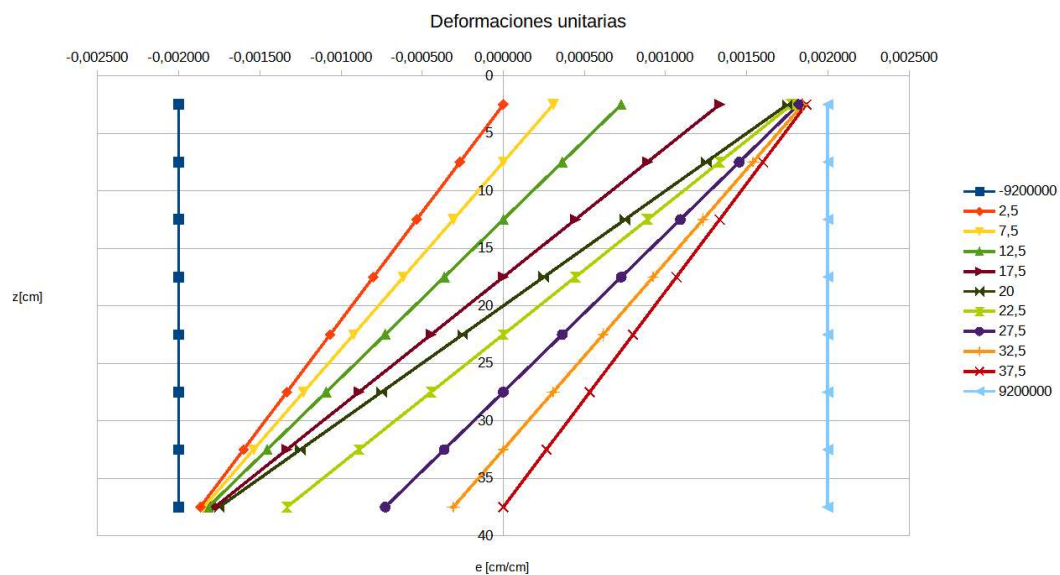


Figura A.1: Deformaciones fibras sección Transversal

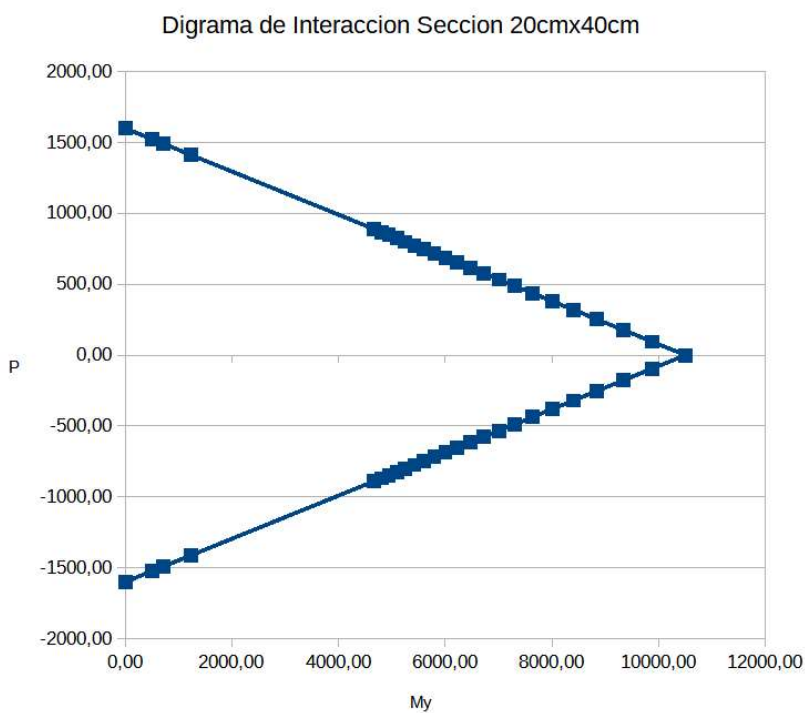


Figura A.2: Diagrama de Interacción Sección 20x40cm

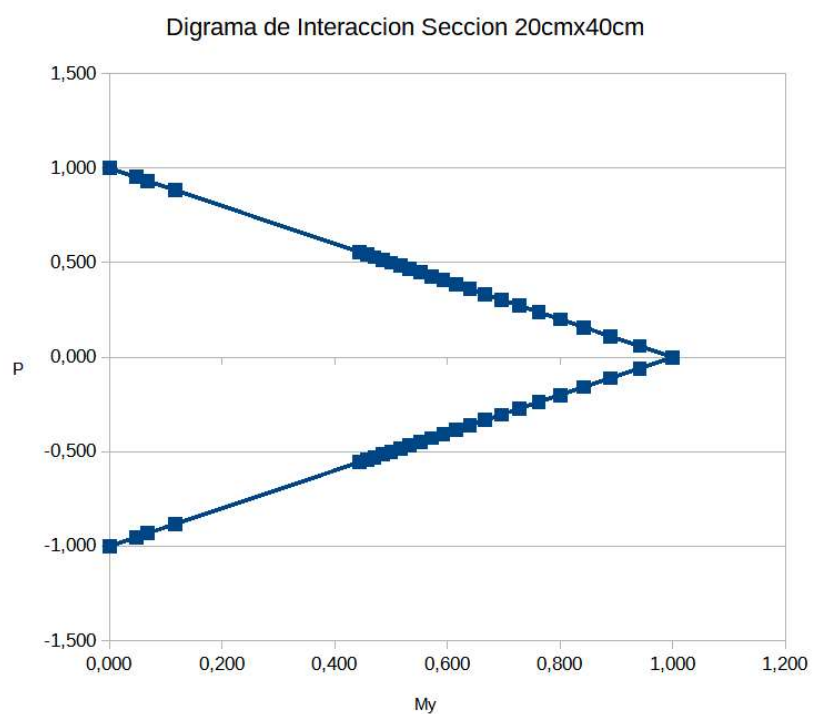


Figura A.3: Diagrama de Interacción Normalizado Sección 20x40cm

ANEXO B : METODO ITERATIVO: CALCULO DE GIROS (P=0 tonf y M=10500 tonf-cm)

Tabla B.1: Calculo giros (vp, ve, v), $q_i = \{10400 ; 0\}$ [tonf-cm] y P=0 [tonf]

Datos rotula plástica				v			
M	10400,00			vp1	0,022805	[rad]	
η	0,05000			vp2	-0,011484	[rad]	
P	0			vp3	0,00000	[cm]	

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	Carga	Rotulas Plásticas		Deformaciones				Flexibilidad V-C		Rigidez V-C		Cargas Corregidas	
2	q(0)	mr(0)	fp(0)	vp(0)	ve(0)	v(0)	vr(0)	f(0)		k(0)		dq(0)	q(1)= q(0)+dq(0)
3	0	0	0	0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0228	2,19E-06	-1,09E-06	609524	304762	10400
4	0	0	0	0	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0115	-1,09E-06	2,19E-06	304762	609524	-50
5													
6	q(1)	mr(1)	fp(1)	vp(1)	ve(1)	v(1)	vr(1)	f(1)		k(1)		dq(1)	q(2)= q(1)+dq(1)
7	10400,00	0	0,00E+00	0	0,0000	0,0228	0,0000	0,0228	2,19E-06	-1,09E-06	609524	304762	0
8	-50,00	0	0	0,00E+00	0,0000	-0,0115	-0,0115	0,0000	-1,09E-06	2,19E-06	304762	609524	-50
9													
10	q(2)	mr(2)	fp(2)	vp(2)	ve(2)	v(2)	vr(2)	f(2)		k(2)		dq(2)	q(3)= q(2)+dq(2)
11	10400,00	0	0,00E+00	0	0,000000	0,022805	0,00000	0,022805	2,19E-06	-1,09E-06	609524	304762	0
12	-50,00	0	0	0,00E+00	0,000000	-0,011484	-0,011484	0,00000	-1,09E-06	2,19E-06	304762	609524	-50

Tabla B.2: Calculo giros (vp, ve, v), $q_i = \{10490 ; 0\}$ [tonf-cm] y P=0 [tonf]

Datos rotula plástica				v			
M	10490,00			vp1	0,022952	[rad]	
η	0,05000			vp2	-0,011484	[rad]	
P	0			vp3	0,00000	[cm]	

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	Carga	Rotulas Plásticas		Deformaciones				Flexibilidad V-C		Rigidez V-C		Cargas Corregidas	
2	q(0)	mr(0)	fp(0)	vp(0)	ve(0)	v(0)	vr(0)	f(0)		k(0)		dq(0)	q(1)= q(0)+dq(0)
3	0	0	0	0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0230	2,19E-06	-1,09E-06	609524	304762	10490
4	0	0	0	0	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0115	-1,09E-06	2,19E-06	304762	609524	-5
5													
6	q(1)	mr(1)	fp(1)	vp(1)	ve(1)	v(1)	vr(1)	f(1)		k(1)		dq(1)	q(2)= q(1)+dq(1)
7	10490,00	0	0,00E+00	0	0,0000	0,0230	0,0000	0,0230	2,19E-06	-1,09E-06	609524	304762	0
8	-5,00	0	0	0,00E+00	0,0000	-0,0115	-0,0115	0,0000	-1,09E-06	2,19E-06	304762	609524	-5
9													
10	q(2)	mr(2)	fp(2)	vp(2)	ve(2)	v(2)	vr(2)	f(2)		k(2)		dq(2)	q(3)= q(2)+dq(2)
11	10490,00	0	0,00E+00	0	0,000000	0,022952	0,00000	0,022952	2,19E-06	-1,09E-06	609524	304762	0
12	-5,00	0	0	0,00E+00	0,000000	-0,011484	-0,011484	0,00000	-1,09E-06	2,19E-06	304762	609524	-5

Tabla B.3: Calculo giros (vp, ve, v), $q_i = \{10500 ; 0\}$ [tonf-cm] y P=0 [tonf]

Datos rotula plástica				v			
M	10500,00			vp1	0,022969	[rad]	
η	0,05000			vp2	-0,011484	[rad]	
P	0			vp3	0,00000	[cm]	

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	Carga	Rotulas Plásticas		Deformaciones				Flexibilidad V-C		Rigidez V-C		Cargas Corregidas	
2	q(0)	mr(0)	fp(0)	vp(0)	ve(0)	v(0)	vr(0)	f(0)		k(0)		dq(0)	q(1)= q(0)+dq(0)
3	0	0	0	0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0230	2,19E-06	-1,09E-06	609524	304762	10500
4	0	0	0	0	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0115	-1,09E-06	2,19E-06	304762	609524	0
5													
6	q(1)	mr(1)	fp(1)	vp(1)	ve(1)	v(1)	vr(1)	f(1)		k(1)		dq(1)	q(2)= q(1)+dq(1)
7	10500,00	1	2,19E-05	0	0,0000	0,0230	0,0000	0,0230	2,41E-05	-1,09E-06	42525	21262	0
8	0,00	0	0	0,00E+00	0,0000	-0,0115	-0,0115	0,0000	-1,09E-06	2,19E-06	21262	467774	0
9													
10	q(2)	mr(2)	fp(2)	vp(2)	ve(2)	v(2)	vr(2)	f(2)		k(2)		dq(2)	q(3)= q(2)+dq(2)
11	10500,00	1	2,19E-05	0	0,000000	0,022969	0,00000	0,022969	2,41E-05	-1,09E-06	42525	21262	0
12	0,00	0	0	0,00E+00	0,000000	-0,011484	-0,011484	0,00000	-1,09E-06	2,19E-06	21262	467774	0

Tabla B.4: Calculo giros (vp, ve, v), $q_i = \{10510 ; 0\}$ [tonf-cm] y P=0 [tonf]

Datos rotula plástica				v			
M	10510,00		Tonf-cm	v1	0.023204	[rad]	
η	0.05000			v2	-0.011484	[rad]	
P	0		Tonf	v3	0.00000	[cm]	

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	Carga			Rotulas Plásticas			Deformaciones			Flexibilidad V-C		Rigidez V-C	Cargas Corregidas	
2	q(0)	mr(0)	fp(0)		vp(0)	ve(0)	v(0)	vr(0)	f(0)		k(0)		dq(0)	q(1)= q(0)+dq(0)
3	0	0	0	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0232	2.19E-06	-1.09E-06	609524	304762	10643	10643.33
4	0	0	0	0	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0115	-1.09E-06	2.19E-06	304762	609524	72	71.67
5														
6	q(1)	mr(1)	fp(1)		vp(1)	ve(1)	v(1)	vr(1)	f(1)		k(1)		dq(1)	q(2)= q(1)+dq(1)
7	10643.33	1	2.19E-05	0	0.0031	0.0232	0.0263	-0.0031	2.41E-05	-1.09E-06	42525	21262	-133	10510.00
8	71.67	0	0	0.00E+00	0.0000	-0.0115	-0.0115	0.0000	-1.09E-06	2.19E-06	21262	467774	-67	5.00
9														
10	q(2)	mr(2)	fp(2)		vp(2)	ve(2)	v(2)	vr(2)	f(2)		k(2)		dq(2)	q(3)= q(2)+dq(2)
11	10510.00	1	2.19E-05	0	0.000219	0.022985	0.023204	0.0000	2.41E-05	-1.09E-06	42525	21262	0	10510.00
12	5.00	0	0	0.00E+00	0.000000	-0.011484	-0.011484	0.0000	-1.09E-06	2.19E-06	21262	467774	0	5.00

Tabla B.5: Calculo giros (vp, ve, v), $q_i = \{10520 ; 0\}$ [tonf-cm] y P=0 [tonf]

Datos rotula plástica				v			
M	10520,00		Tonf-cm	v1	0.023439	[rad]	
η	0.05000			v2	-0.011484	[rad]	
P	0		Tonf	v3	0.00000	[cm]	

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	Carga		Rotulas Plásticas			Deformaciones			Flexibilidad V-C		Rigidez V-C		Cargas Corregidas	
2	q(0)	mr(0)	fp(0)		vp(0)	ve(0)	v(0)	vr(0)	f(0)		k(0)		dq(0)	q(1)= q(0)+dq(0)
3	0	0	0	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0234	2.19E-06	-1.09E-06	609524	304762	10787	10786.67
4	0	0	0	0	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0115	-1.09E-06	2.19E-06	304762	609524	143	143.33
5														
6	q(1)	mr(1)	fp(1)		vp(1)	ve(1)	v(1)	vr(1)	f(1)		k(1)		dq(1)	q(2)= q(1)+dq(1)
7	10786.67	1	2.19E-05	0	0.0063	0.0234	0.0297	-0.0063	2.41E-05	-1.09E-06	42525	21262	-267	10520.00
8	143.33	0	0	0.00E+00	0.0000	-0.0115	-0.0115	0.0000	-1.09E-06	2.19E-06	21262	467774	-133	10.00
9														
10	q(2)	mr(2)	fp(2)		vp(2)	ve(2)	v(2)	vr(2)	f(2)		k(2)		dq(2)	q(3)= q(2)+dq(2)
11	10520.00	1	2.19E-05	0	0.000438	0.023002	0.023439	0.0000	2.41E-05	-1.09E-06	42525	21262	0	10520.00
12	10.00	0	0	0.00E+00	0.000000	-0.011484	-0.011484	0.0000	-1.09E-06	2.19E-06	21262	467774	0	10.00

Tabla B.6: Calculo giros (vp, ve, v), $q_i = \{10530 ; 0\}$ [tonf-cm] y P=0 [tonf]

Datos rotula plástica				v			
M	10530,00		Tonf-cm	v1	0.023674	[rad]	
η	0,05000			v2	-0,011484	[rad]	
P	0		Tonf	v3	0,00000	[cm]	

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	Carga		Rotulas Plásticas			Deformaciones			Flexibilidad V-C		Rigidez V-C		Cargas Corregidas	
2	q(0)	mr(0)	fp(0)		vp(0)	ve(0)	v(0)	vr(0)	f(0)		k(0)		dq(0)	q(1)= q(0)+dq(0)
3	0	0	0	0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0237	2,19E-06	-1,09E-06	609524	304762	10930	10930,00
4	0	0	0	0	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0115	-1,09E-06	2,19E-06	304762	609524	215	215,00
5														
6	q(1)	mr(1)	fp(1)		vp(1)	ve(1)	v(1)	vr(1)	f(1)		k(1)		dq(1)	q(2)= q(1)+dq(1)
7	10930,00	1	2,19E-05	0	0,0094	0,0237	0,0331	-0,0094	2,41E-05	-1,09E-06	42525	21262	-400	10530,00
8	215,00	0	0	0,00E+00	0,0000	-0,0115	-0,0115	0,0000	-1,09E-06	2,19E-06	21262	467774	-200	15,00
9														
10	q(2)	mr(2)	fp(2)		vp(2)	ve(2)	v(2)	vr(2)	f(2)		k(2)		dq(2)	q(3)= q(2)+dq(2)
11	10530,00	1	2,19E-05	0	0,000656	0,023018	0.023674	0,0000	2,41E-05	-1,09E-06	42525	21262	0	10530,00
12	15,00	0	0	0,00E+00	0,000000	-0,011484	-0,011484	0,0000	-1,09E-06	2,19E-06	21262	467774	0	15,00

Tabla B.7: Calculo giros (vp, ve, v), $q_i = \{10600 ; 0\}$ [tonf-cm] y P=0 [tonf]

Datos rotula plástica				v		
M	10600,00		Tonf-cm	v1	0,025320	[rad]
n	0,05000			v2	-0,011484	[rad]
P	0		Tonf	v3	0,00000	[cm]

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Carga	Rotulas Plásticas			Deformaciones				Flexibilidad V-C		Rigidez V-C		Cargas Corregidas	
q(0)	mr(0)	fp(0)		vp(0)	ve(0)	v(0)	vr(0)	f(0)		k(0)		dq(0)	q(1)= q(0)+dq(0)
0	0	0	0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0253	2,19E-06	-1,09E-06	609524	304762	11933	11933,33
0	0	0	0	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0115	-1,09E-06	2,19E-06	304762	609524	717	716,67
q(1)	mr(1)	fp(1)		vp(1)	ve(1)	v(1)	vr(1)	f(1)		k(1)		dq(1)	q(2)= q(1)+dq(1)
11933,33	1	2,19E-05	0	0,0314	0,0253	0,0567	-0,0314	2,41E-05	-1,09E-06	42525	21262	-1333	10600,00
716,67	0	0	0,00E+00	0,0000	-0,0115	-0,0115	0,0000	-1,09E-06	2,19E-06	21262	467774	-667	50,00
q(2)	mr(2)	fp(2)		vp(2)	ve(2)	v(2)	vr(2)	f(2)		k(2)		dq(2)	q(3)= q(2)+dq(2)
10600,00	1	2,19E-05	0	0,002187	0,023133	0,025320	0,0000	2,41E-05	-1,09E-06	42525	21262	0	10600,00
50,00	0	0	0,00E+00	0,000000	-0,011484	-0,011484	0,0000	-1,09E-06	2,19E-06	21262	467774	0	50,00

Tabla B.8: Calculo giros (vp, ve, v), $q_i = \{10700 ; 0\}$ [tonf-cm] y P=0 [tonf]

Datos rotula plástica				v		
M	10700,00		Tonf-cm	v1	0,027672	[rad]
n	0,05000			v2	-0,011484	[rad]
P	0		Tonf	v3	0,00000	[cm]

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Carga	Rotulas Plásticas			Deformaciones				Flexibilidad V-C		Rigidez V-C		Cargas Corregidas	
q(0)	mr(0)	fp(0)		vp(0)	ve(0)	v(0)	vr(0)	f(0)		k(0)		dq(0)	q(1)= q(0)+dq(0)
0	0	0	0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0277	2,19E-06	-1,09E-06	609524	304762	13367	13366,67
0	0	0	0	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0115	-1,09E-06	2,19E-06	304762	609524	1433	1433,33
q(1)	mr(1)	fp(1)		vp(1)	ve(1)	v(1)	vr(1)	f(1)		k(1)		dq(1)	q(2)= q(1)+dq(1)
13366,67	1	2,19E-05	0	0,0627	0,0277	0,0904	-0,0627	2,41E-05	-1,09E-06	42525	21262	-2667	10700,00
1433,33	0	0	0,00E+00	0,0000	-0,0115	-0,0115	0,0000	-1,09E-06	2,19E-06	21262	467774	-1333	100,00
q(2)	mr(2)	fp(2)		vp(2)	ve(2)	v(2)	vr(2)	f(2)		k(2)		dq(2)	q(3)= q(2)+dq(2)
10700,00	1	2,19E-05	0	0,004375	0,023297	0,027672	0,0000	2,41E-05	-1,09E-06	42525	21262	0	10700,00
100,00	0	0	0,00E+00	0,000000	-0,011484	-0,011484	0,0000	-1,09E-06	2,19E-06	21262	467774	0	100,00

Tabla B.9: Calculo giros (vp, ve, v), $q_i = \{10900 ; 0\}$ [tonf-cm] y P=0 [tonf]

Datos rotula plástica				v		
M	10900,00		Tonf-cm	v1	0,032375	[rad]
n	0,05000			v2	-0,011484	[rad]
P	0		Tonf	v3	0,00000	[cm]

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Carga	Rotulas Plásticas			Deformaciones				Flexibilidad V-C		Rigidez V-C		Cargas Corregidas	
q(0)	mr(0)	fp(0)		vp(0)	ve(0)	v(0)	vr(0)	f(0)		k(0)		dq(0)	q(1)= q(0)+dq(0)
0	0	0	0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0324	2,19E-06	-1,09E-06	609524	304762	16233	16233,33
0	0	0	0	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0115	-1,09E-06	2,19E-06	304762	609524	2867	2866,67
q(1)	mr(1)	fp(1)		vp(1)	ve(1)	v(1)	vr(1)	f(1)		k(1)		dq(1)	q(2)= q(1)+dq(1)
16233,33	1	2,19E-05	0	0,1254	0,0324	0,1578	-0,1254	2,41E-05	-1,09E-06	42525	21262	-5333	10900,00
2866,67	0	0	0,00E+00	0,0000	-0,0115	-0,0115	0,0000	-1,09E-06	2,19E-06	21262	467774	-2667	200,00
q(2)	mr(2)	fp(2)		vp(2)	ve(2)	v(2)	vr(2)	f(2)		k(2)		dq(2)	q(3)= q(2)+dq(2)
10900,00	1	2,19E-05	0	0,008750	0,023625	0,032375	0,0000	2,41E-05	-1,09E-06	42525	21262	0	10900,00
200,00	0	0	0,00E+00	0,000000	-0,011484	-0,011484	0,0000	-1,09E-06	2,19E-06	21262	467774	0	200,00

Tabla B.10: Calculo giros (vp, ve, v), $q_i = \{11100 ; 0\}$ [tonf-cm] y P=0 [tonf]

Datos rotula plástica								v							
M	11100,00			Tonf-cm				v1	0,037078	[rad]					
η	0,05000							v2	-0,011484	[rad]					
P	0			Tonf				v3	0,00000	[cm]					

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Carga	Rotulas Plásticas			Deformaciones				Flexibilidad V-C		Rigidez V-C		Cargas Corregidas	
q(0)	mr(0)	fp(0)		vp(0)	ve(0)	v(0)	vr(0)	f(0)		k(0)		dq(0)	q(1)= q(0)+dq(0)
0	0	0	0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0371	2,19E-06	-1,09E-06	609524	304762	19100	19100,00
0	0	0	0	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0115	-1,09E-06	2,19E-06	304762	609524	4300	4300,00
q(1)	mr(1)	fp(1)		vp(1)	ve(1)	v(1)	vr(1)	f(1)		k(1)		dq(1)	q(2)= q(1)+dq(1)
19100,00	1	2,19E-05	0	0,1881	0,0371	0,2252	-0,1881	2,41E-05	-1,09E-06	42525	21262	-8000	11100,00
4300,00	0	0	0,00E+00	0,0000	-0,0115	-0,0115	0,0000	-1,09E-06	2,19E-06	21262	467774	-4000	300,00
q(2)	mr(2)	fp(2)		vp(2)	ve(2)	v(2)	vr(2)	f(2)		k(2)		dq(2)	q(3)= q(2)+dq(2)
11100,00	1	2,19E-05	0	0,013125	0,023953	0,037078	0,0000	2,41E-05	-1,09E-06	42525	21262	0	11100,00
300,00	0	0	0,00E+00	0,000000	-0,011484	-0,011484	0,0000	-1,09E-06	2,19E-06	21262	467774	0	300,00

Tabla B.11: Calculo giros (vp, ve, v), $q_i = \{11400 ; 0\}$ [tonf-cm] y P=0 [tonf]

Datos rotula plástica								v							
M	11400,00			Tonf-cm				v1	0,044133	[rad]					
η	0,05000							v2	-0,011484	[rad]					
P	0			Tonf				v3	0,00000	[cm]					

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Carga	Rotulas Plásticas			Deformaciones				Flexibilidad V-C		Rigidez V-C		Cargas Corregidas	
q(0)	mr(0)	fp(0)		vp(0)	ve(0)	v(0)	vr(0)	f(0)		k(0)		dq(0)	q(1)= q(0)+dq(0)
0	0	0	0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0441	2,19E-06	-1,09E-06	609524	304762	23400	23400,00
0	0	0	0	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0115	-1,09E-06	2,19E-06	304762	609524	6450	6450,00
q(1)	mr(1)	fp(1)		vp(1)	ve(1)	v(1)	vr(1)	f(1)		k(1)		dq(1)	q(2)= q(1)+dq(1)
23400,00	1	2,19E-05	0	0,2822	0,0441	0,3263	-0,2822	2,41E-05	-1,09E-06	42525	21262	-12000	11400,00
6450,00	0	0	0,00E+00	0,0000	-0,0115	-0,0115	0,0000	-1,09E-06	2,19E-06	21262	467774	-6000	450,00
q(2)	mr(2)	fp(2)		vp(2)	ve(2)	v(2)	vr(2)	f(2)		k(2)		dq(2)	q(3)= q(2)+dq(2)
11400,00	1	2,19E-05	0	0,019687	0,024445	0,044133	0,0000	2,41E-05	-1,09E-06	42525	21262	0	11400,00
450,00	0	0	0,00E+00	0,000000	-0,011484	-0,011484	0,0000	-1,09E-06	2,19E-06	21262	467774	0	450,00