



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA

VALIDACIÓN DE RÓTULAS PLÁSTICAS NO LINEALES DEL PROGRAMA SAP2000

DANILO FERNANDO VARGAS ÁLVAREZ

Informe de Actividad de Graduación para optar al Grado de
Magíster en Ingeniería Estructural y Geotécnica

Profesor Supervisor:
MATÍAS HUBE GINESTAR

Santiago de Chile, mayo, 2023.

A Bárbara, mi esposa.

AGRADECIMIENTOS

Quisiera agradecer al Profesor Matías Hube por poner a disposición el interesante tema de este trabajo para que fuera desarrollado y por guiarme de forma dedicada durante la realización del mismo.

Adicionalmente, agradezco al equipo docente completo del programa MasterIEG por impartir cursos de altísima calidad académica y profesional, y también al equipo administrativo, en particular a Elena Cornejo y a Ana María Oteíza, cuya asistencia fue de suma importancia durante mi paso por el programa MasterIEG.

El trabajo de esta actividad de Graduación se enmarca dentro de los objetivos del Centro de Innovación con Hormigón UC y del proyecto Fondecyt #1211823.

ÍNDICE GENERAL

Pág.

DEDICATORIA.....	ii
AGRADECIMIENTOS	iii
ÍNDICE GENERAL.....	iv
ÍNDICE DE TABLAS	vi
ÍNDICE DE FIGURAS.....	viii
RESUMEN.....	x
ABSTRACT	xi
I. INTRODUCCIÓN	12
I.1. Objetivos	12
I.2. Organización	13
II. MARCO TEÓRICO	14
II.1. Viga con rótulas plásticas flexurales	14
II.2. Viga-columna con rótulas plásticas a flexocompresión	19
II.3. Rótulas plásticas en SAP2000	23
III. VALIDACIÓN ELEMENTO VIGA CON RÓTULAS M3	25
III.1. Ejemplo de estudio	25
III.2. Solución en Excel.....	26
III.3. Validación en SAP2000	28
III.3.1. Modelo estructural	28
III.3.2. Rótulas plásticas M3.....	31
III.3.3. Resultados del análisis estático no lineal.....	34

IV.	VALIDACIÓN VIGA-COLUMNA CON RÓTULAS P-M3.....	37
IV.1.	Ejemplo de estudio	37
IV.2.	Solución en Excel.....	38
IV.2.1.	Caso de flexión pura	39
IV.2.2.	Caso de flexocompresión a 10% de capacidad axial	41
IV.2.3.	Caso de flexocompresión a 20% de capacidad axial	43
IV.3.	Validación en SAP2000	44
IV.3.1.	Modelo estructural	45
IV.3.2.	Rótulas plásticas P-M3	48
IV.3.3.	Caso de flexión pura	54
IV.3.4.	Caso de flexocompresión a 10% de capacidad axial	58
IV.3.5.	Caso de flexocompresión a 20% de capacidad axial	62
V.	CONCLUSIONES Y COMENTARIOS	67
VI.	BIBLIOGRAFIA	69
VII.	ANEXO A.....	71
VII.1.	Sección transversal del elemento viga-columna	71
VII.2.	Diagrama de interacción P-M3 de la sección.....	72
VIII.	ANEXO B.....	75
VIII.1.	Proceso iterativo, viga con rótulas M3.....	75
VIII.2.	Proceso iterativo, viga-columna con rótulas P-M3, $P=0$	78
VIII.3.	Proceso iterativo, viga-columna con rótulas P-M3, $P=10\% f_c A$	81
VIII.4.	Proceso iterativo, viga-columna con rótulas P-M3, $P=20\% f_c A$	84

INDICE DE TABLAS

	Pág.
Tabla II-1. Cálculo de parámetros, viga con rótulas M3, iteración n.....	19
Tabla II-2. Cálculo de parámetros, viga con rótulas P-M3, iteración n.	22
Tabla III-1. Datos del problema.	25
Tabla III-2. Parámetros de cálculo.	26
Tabla III-3. Matrices de rigidez y flexibilidad elásticas.....	26
Tabla III-4. Cálculo de las iteraciones para viga columna con rótulas M3.....	27
Tabla III-5. Resumen de resultados.....	27
Tabla III-6. Cálculo de punto C de curva momento – rotación.....	33
Tabla III-7. Resultados en rótulas plásticas, Load Case “MOMENT_NL”.....	36
Tabla III-8. Comparación resultados análisis no lineal.....	36
Tabla IV-1. Parámetros de cálculo.	38
Tabla IV-2. Matrices de rigidez y flexibilidad elásticas.	38
Tabla IV-3. Momentos plásticos según carga axial.	39
Tabla IV-4. Carga axial $P=0$ y deformaciones totales.	39
Tabla IV-5. Cálculo de las iteraciones, $P=0$	39
Tabla IV-6. Resumen de resultados, $P=0$	40
Tabla IV-7. Carga axial $P=10\% f_c A$ y deformaciones totales.	41
Tabla IV-8. Cálculo de las iteraciones, $P=10\% f_c A$	41
Tabla IV-9. Resumen de resultados, $P=10\% f_c A$	42
Tabla IV-10. Carga axial $P=20\% f_c A$ y deformaciones totales.	43
Tabla IV-11. Cálculo de las iteraciones, $P=20\% f_c A$	43
Tabla IV-12. Resumen de resultados, $P=20\% f_c A$	44
Tabla IV-13. Cálculo de punto C de curva momento – rotación, $P=0$	56
Tabla IV-14. Resultados en rótulas P-M3, Load Case “P+M_NL”, $P=0$	57
Tabla IV-15. Comparación resultados análisis no lineal, $P=0$	57
Tabla IV-16. Cálculo de punto C de curva momento – rotación, $P=10\% f_c A$	60

Tabla IV-17. Resultados en rótulas P-M3, Load Case “P+M_NL”, $P=10\% f_c A$	61
Tabla IV-18. Comparación resultados análisis no lineal, $P=10\% f_c A$	62
Tabla IV-19. Cálculo de punto C de curva momento – rotación, $P=20\% f_c A$	64
Tabla IV-20. Resultados en rótulas P-M3, Load Case “P+M_NL”, $P=20\% f_c A$	65
Tabla IV-21. Comparación resultados análisis no lineal, $P=20\% f_c A$	66
Tabla VII-1. Datos del diagrama de interacción P-M3.	74
Tabla VIII-1. Resultados iteración $n=0$	75
Tabla VIII-2. Resultados iteración $n=1$	76
Tabla VIII-3. Resultados iteración $n=2$	77
Tabla VIII-4. Resultados iteración $n=0$, $P=0$	78
Tabla VIII-5. Resultados iteración $n=1$, $P=0$	79
Tabla VIII-6. Resultados iteración $n=2$, $P=0$	80
Tabla VIII-7. Resultados iteración, $n=0$, $P=10\% f_c A$	81
Tabla VIII-8. Resultados iteración $n=1$, $P=10\% f_c A$	82
Tabla VIII-9. Resultados iteración $n=2$, $P=10\% f_c A$	83
Tabla VIII-10. Resultados iteración $n=0$, $P=20\% f_c A$	84
Tabla VIII-11. Resultados iteración $n=1$, $P=20\% f_c A$	85
Tabla VIII-12. Resultados iteración $n=2$, $P=20\% f_c A$	86

INDICE DE FIGURAS

	Pág.
Figura II-1. Viga con rótulas M3 y dos grados de libertad (Hube, 2022b).....	14
Figura II-2. Compatibilidad de rotaciones (Hube, 2022b).	15
Figura II-3. Momento vs rotación plástica (Hube, 2022b).....	17
Figura II-4. Viga con rótulas P-M3 y tres grados de libertad (Hube, 2022b)	20
Figura II-5. Compatibilidad de deformaciones. Figura adaptada desde Hube (2022b)	20
Figura II-6. Fuerza – deformación y criterios de aceptación (FEMA 356, 2000).....	23
Figura II-7. Fuerza – deformación de rótulas con control de deformación (CSi, 2017).....	24
Figura III-1. Viga con rótulas M3 y dos grados de libertad (Hube, 2022b).....	25
Figura III-2. Modelo en SAP2000 de la viga simplemente apoyada.	28
Figura III-3. Load Pattern “MOMENT”.	29
Figura III-4. Load Case “MOMENT_NL”.	30
Figura III-5. Momentos aplicados en la viga, Load Pattern “MOMENT”.	30
Figura III-6. Definición de rótula M3 en SAP2000.	31
Figura III-7. Curva momento – rotación de rótula M3.	32
Figura III-8. Asignación de rótulas M3 a la viga.	34
Figura III-9. Deformada de viga, Load Case “MOMENT_NL”.	35
Figura IV-1. Viga-columna, rótulas P-M3 y tres grados de libertad (Hube, 2022b)	37
Figura IV-2. Load Pattern “MOMENT” y “AXIAL”.	45
Figura IV-3. Load Case “AXIAL_NL”.....	46
Figura IV-4. Load Case “P+M_NL”.....	47
Figura IV-5. Definición de rótula P-M3 en SAP2000.	48
Figura IV-6. Especificaciones para rótula P-M3 en SAP2000.....	49
Figura IV-7. Lista de cargas axiales para rótula P-M3 en SAP2000.	50
Figura IV-8. Opciones de diagrama de interacción para rótula P-M3.	51
Figura IV-9. Ingreso manual de diagrama de interacción P-M3.....	52
Figura IV-10. Asignación de rótulas P-M3 a la viga-columna.	53

Figura IV-11. Cargas, Load Pattern “MOMENT” y “AXIAL” $P=0$	54
Figura IV-12. Momento – Rotación de rótula P-M3 en SAP2000, $P=0$	55
Figura IV-13. Deformada de viga, Load Case “P+M_NL”, $P=0$	56
Figura IV-14. Cargas, Load Pattern “MOMENT” y “AXIAL” $P=10\% f_c A$	58
Figura IV-15. Curva Momento Rotación de rótula P-M3 en SAP2000, $P=10\% f_c A$	59
Figura IV-16. Deformada de viga, Load Case “P+M_NL”, $P=10\% f_c A$	61
Figura IV-17. Cargas, Load Pattern “MOMENT” y “AXIAL” $P=20\% f_c A$	62
Figura IV-18. Curva Momento Rotación de rótula P-M3 en SAP2000, $P=20\% f_c A$	63
Figura IV-19. Deformada de viga, Load Case “P+M_NL”, $P=20\% f_c A$	65
Figura VII-1. Sección transversal del elemento (Hube, 2022a).....	71
Figura VII-2. Sección transversal en Section Designer de SAP2000.	72
Figura VII-3. Puntos del diagrama de interacción P-M3, SAP2000.....	73
Figura VII-4. Diagrama de interacción P-M3.	74

RESUMEN

Con el tiempo, los programas computacionales de análisis estructural han mejorado su eficiencia en términos de tiempo de proceso y facilidad de manejo del usuario. Sin embargo, esto no implica que la documentación de los programas sea totalmente clara, ni que su uso profesional se lleve a cabo con una completa comprensión de sus procesos internos. Teniendo en cuenta el contexto descrito, el presente trabajo tiene como objetivo validar el análisis estático no lineal de elementos viga-columna con plasticidad concentrada en sus extremos del programa SAP2000. En particular, se analizan elementos viga-columna con rótulas flexurales y de flexocompresión. La validación se realiza a través de la comparación de los resultados de SAP2000 con los obtenidos en planillas de Excel. Los resultados de los dos programas muestran diferencias despreciables en las rotaciones de rótulas flexurales. En el caso de rótulas a flexocompresión, las diferencias entre resultados aumentan mientras crece la carga axial aplicada. Por ejemplo, para una compresión equivalente al 20% de la capacidad axial de la sección, el error en la estimación numérica de la rotación total fue de 10%. Las diferencias obtenidas se deben principalmente a la componente plástica de la rotación, cuyo error fue, en particular, de 21%. Finalmente, se propone investigaciones futuras sobre la consideración de la relación carga axial – deformación axial en rótulas a flexocompresión de SAP2000.

ABSTRACT

Over time, structural analysis computer softwares have enhanced their efficiency in terms of processing time and user-friendliness. However, that does not imply that software documentation is totally clear, nor that its professional use is carried out with a complete understanding of its internal processes. Given the described context, the present work has the goal of validating the SAP2000 nonlinear static analysis of beam-column elements with concentrated plasticity on their ends. Particularly, beam-column elements with flexure and flexocompression hinges are analyzed. This validation is carried out by comparing SAP2000 results with those calculated using Excel spreadsheets. The results of both softwares show negligible differences in flexure hinge rotations. In case of flexocompression hinges, the greater the applied axial load, the broader the differences between Excel and SAP2000 results. For example, a compressive axial load equivalent to 20% of the cross-section axial capacity produced a total rotation numerical error of 10%. Differences obtained are mainly due to plastic rotation component, error of which particularly reached 21%. Finally, future research on axial load – axial deformation relationship setting is proposed for SAP2000 flexocompression hinges.

I. INTRODUCCIÓN

La motivación para realizar este trabajo surge del hecho de que los programas computacionales de análisis estructural con el paso del tiempo han aumentado la facilidad de su uso y su eficiencia, ya sea en presentación de datos y resultados, formas de ingreso de parámetros y tiempos de análisis, entre otras características. Sin embargo, estas mejoras no implican, que estén necesariamente bien documentadas todas las metodologías en los manuales de referencia. No obstante, los programas computacionales son utilizados masivamente en oficinas de ingeniería, sin dudar de su funcionamiento. El programa SAP2000® es un ejemplo de lo anteriormente expresado, además de otros pertenecientes a la compañía Computers and Structures Inc., tales como ETABS® y SAFE®.

Un tipo de análisis estructural en el que es importante entender el funcionamiento de los programas es el análisis no lineal, y los distintos métodos no lineales que se han desarrollado a través del tiempo. Los métodos no lineales más comunes son: (1) el análisis estático no lineal o Pushover, usado para predecir la generación de rótulas plásticas; y (2) el análisis dinámico no lineal que se enfoca en el comportamiento estructural durante un registro de aceleraciones. Estos métodos de análisis requieren de elementos estructurales que pueden tener características no lineales en su materialidad y/o en su geometría.

I.1. Objetivos

El objetivo de este trabajo es validar el análisis estático no lineal de elementos viga-columna con plasticidad concentrada en sus extremos del programa SAP2000 v23.2.0 (CSi, 2021). En particular, este trabajo considera la validación del análisis de un elemento viga-columna de hormigón armado con dos tipos de rótulas plásticas: (1) rótulas flexurales con momentos flectores aplicados, y (2) rótulas de flexocompresión con momentos flectores y una carga axial aplicada.

Para validar los resultados de SAP2000, se comparan los resultados del análisis no lineal de estos elementos con los obtenidos utilizando planillas de Excel.

I.2. Organización

El capítulo II del trabajo presenta el marco teórico de la solución del análisis estático no lineal con las ecuaciones del comportamiento de la estructura, considerando las características no lineales presentes en las rótulas plásticas.

El capítulo III muestra el análisis en Excel y en SAP2000 de un elemento viga con rótulas flexurales en sus extremos sometidas a momentos flectores, y una comparación de los resultados de ambos programas.

El capítulo IV muestra el análisis en los programas antes mencionados, de un elemento viga-columna con rótulas a flexocompresión en sus extremos sometidas a momentos flectores y carga axial, además de una comparación de los resultados.

El capítulo V contiene las conclusiones y comentarios del estudio, el capítulo VI presenta la bibliografía considerada en este documento.

El Anexo A detalla la forma en que se obtiene el diagrama de interacción P-M de los elementos analizados, y el Anexo B detalla el cálculo paso a paso realizado en la planilla Excel para los elementos estructurales analizados.

II. MARCO TEÓRICO

Este capítulo describe el marco teórico para el análisis de un elemento tipo viga-columna con plasticidad concentrada. Este elemento también es denominado *One Component Series Model* (Bozorgnia y Bertero, 2004) y corresponde a un elemento elástico-lineal conectado en serie con un resorte rígido-plástico en cada extremo.

La sección II.1 presenta la formulación del elemento viga con rótulas plásticas flexurales en sus extremos y la sección II.2 muestra la formulación para el elemento viga-columna con rótulas plásticas de flexocompresión en sus extremos. Finalmente, la sección II.3 presenta las consideraciones que tiene el programa SAP2000 para la definición de este tipo de rótulas.

II.1. Viga con rótulas plásticas flexurales

El elemento viga-columna con rótulas plásticas concentradas tiene un comportamiento elástico-lineal a lo largo del elemento y tiene resortes rígido-plásticos con endurecimiento en sus extremos. Estos resortes corresponden a rótulas flexurales, en adelante referidas como “rótulas M3”. En este caso, se considera un grado de libertad de rotación en cada extremo, sin deformación axial ni de corte (ver Figura II-1).

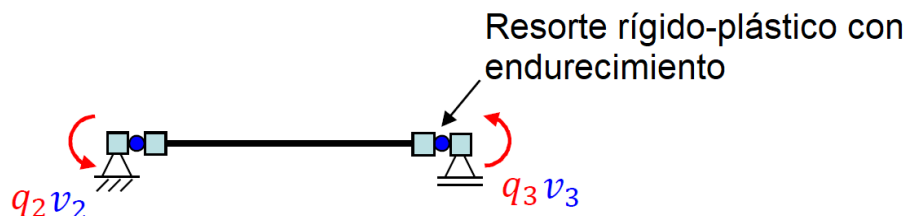


Figura II-1. Viga con rótulas M3 y dos grados de libertad (Hube, 2022b)

El vector de rotaciones $\mathbf{v}$ (II.1) tiene una componente elástica $\mathbf{v}_e$ (II.2) y una plástica $\mathbf{v}_p$ (II.3). Por lo tanto, la compatibilidad de rotaciones (ver Figura II-2) corresponde a la igualdad entre las rotaciones totales $\mathbf{v}$ (II.5) y la suma de las rotaciones elásticas $\mathbf{v}_e$ y plásticas $\mathbf{v}_p$. Estas rotaciones dependen de los momentos en los extremos $\mathbf{q}$ (II.4).

$$\mathbf{v} = [v_2 \quad v_3]^T \quad (II.1)$$

$$\mathbf{v}_e = [v_{e2} \quad v_{e3}]^T \quad (II.2)$$

$$\mathbf{v}_p = [v_{p2} \quad v_{p3}]^T \quad (II.3)$$

$$\mathbf{q} = [q_2 \quad q_3]^T \quad (II.4)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{q}) = \mathbf{v}_e(\mathbf{q}) + \mathbf{v}_p(\mathbf{q}) \quad (II.5)$$

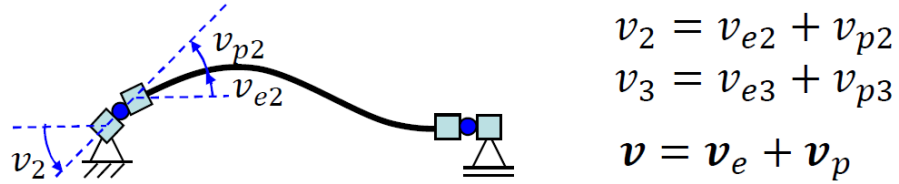


Figura II-2. Compatibilidad de rotaciones (Hube, 2022b).

La relación constitutiva (II.6) vincula las rotaciones elásticas $\mathbf{v}_e$ del tramo interior del elemento con los momentos en los extremos $\mathbf{q}$. La rigidez $\mathbf{k}_e$ (II.7) corresponde a la matriz de rigidez elástica de la viga para los dos grados de libertad de rotación en los extremos. La matriz de rigidez tiene determinante no nulo, por lo tanto, es invertible y su inversa es la matriz de flexibilidad elástica de la estructura $\mathbf{f}_e$ (II.8). Esta matriz permite escribir la relación constitutiva en función del vector de momentos $\mathbf{q}$ (II.9).

$$\mathbf{q}(\mathbf{v}_e) = \mathbf{k}_e \cdot \mathbf{v}_e \quad (\text{II.6})$$

$$\mathbf{k}_e = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (\text{II.7})$$

$$\mathbf{f}_e = \mathbf{k}_e^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{L}{3EI} & \frac{-L}{6EI} \\ \frac{-L}{6EI} & \frac{L}{3EI} \end{bmatrix} \quad (\text{II.8})$$

$$\mathbf{v}_e(\mathbf{q}) = \mathbf{f}_e \cdot \mathbf{q} \quad (\text{II.9})$$

Adicionalmente, el vector de rotaciones plásticas $\mathbf{v}_p$ puede ser escrito en función de los momentos $\mathbf{q}$ (II.10). Para obtener una rotación plástica en un extremo, el momento debe superar el límite de momento plástico M_p (en vector $\mathbf{Q}_p$ (II.11)). El momento plástico está asociado a la sección transversal y corresponde al valor del momento nominal (también se podría usar momento de fluencia), cuando la carga axial es nula en el diagrama de interacción P-M (ver ejemplo en Tabla VII-1). La matriz de flexibilidad plástica $\mathbf{f}_p$ de la estructura (II.12) relaciona las rotaciones plásticas y los momentos.

$$\mathbf{v}_p(\mathbf{q}) = \mathbf{f}_p(\mathbf{q}) \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{Q}_p) \quad (\text{II.10})$$

$$\mathbf{Q}_p = \begin{bmatrix} M_p \\ M_p \end{bmatrix} \quad (\text{II.11})$$

$$\mathbf{f}_p(\mathbf{q}) = \frac{1}{k_{rot}} \cdot \begin{bmatrix} m_{r2}(q_2) & 0 \\ 0 & m_{r3}(q_3) \end{bmatrix} \quad (\text{II.12})$$

Los factores m_{r2} (II.13) y m_{r3} (II.14) toman el valor de la unidad (1,0) si los momentos asociados q_2 y q_3 superan el momento plástico M_p . Si el momento es menor al límite plástico, el factor asociado es cero. La matriz de flexibilidad plástica está caracterizada por la rigidez rotacional de la rótula M3, k_{rot} , (II.15). La rigidez rotacional depende del material y geometría de la viga, y del factor η , que es la constante de endurecimiento de la rótula M3.

$$m_{r2}(q_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } q_2 \geq M_p \\ 0 & \text{si } q_2 < M_p \end{cases} \quad (\text{II.13})$$

$$m_{r3}(q_3) = \begin{cases} 1 & \text{si } q_3 \geq M_p \\ 0 & \text{si } q_3 < M_p \end{cases} \quad (\text{II.14})$$

$$k_{rot} = \eta \cdot \frac{6EI}{L} \quad (\text{II.15})$$

La Figura II-3 muestra la relación entre rotaciones plásticas y momentos para valores de momentos superiores al momento plástico. Gráficamente, la rigidez rotacional de la rótula M3 es la pendiente de la recta momento-rotación plástica que inicia una vez alcanzado el momento plástico, cuando la rotación plástica es nula.

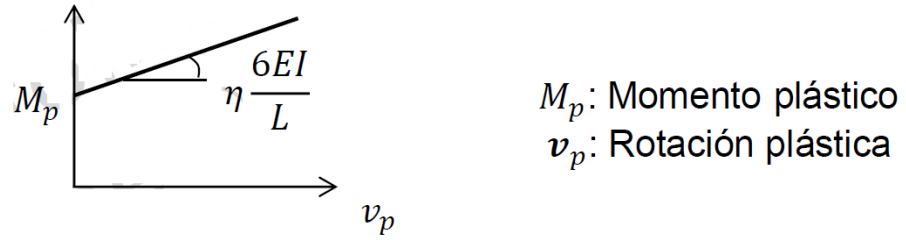


Figura II-3. Momento vs rotación plástica (Hube, 2022b)

La derivada de las rotaciones respecto a los momentos $\mathbf{q}$ (II.16) es equivalente a la matriz de flexibilidad total $\mathbf{f}(\mathbf{q})$ de la viga. A su vez, las funciones de rotaciones elásticas (II.17) y plásticas (II.18) pueden ser aproximadas usando la expansión en serie de Taylor de primer orden en torno al vector de momentos iniciales conocidos $\mathbf{q}_0$ para obtener los momentos $\mathbf{q}$ a través del método iterativo de Newton-Raphson.

$$\frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial \mathbf{v}_e(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{v}_p(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{f}_e + \mathbf{f}_p(\mathbf{q}) = \mathbf{f}(\mathbf{q}) \quad (\text{II.16})$$

$$\mathbf{v}_e(\mathbf{q}) = \mathbf{v}_e(\mathbf{q}_0) + \left. \frac{\partial \mathbf{v}_e(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right|_{\mathbf{q}_0} \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) \quad (\text{II.17})$$

$$\mathbf{v}_p(\mathbf{q}) = \mathbf{v}_p(\mathbf{q}_0) + \left. \frac{\partial \mathbf{v}_p(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right|_{\mathbf{q}_0} \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) \quad (\text{II.18})$$

Durante un análisis no lineal de una estructura, el vector de rotaciones totales de un elemento resulta conocido durante el análisis. Este vector es igual a la suma de las dos ecuaciones anteriores (II.19). Las rotaciones (II.20) y momentos residuales (II.21) pueden ser escritos como relaciones constitutivas. Finalmente, el vector de momentos totales (II.22) corresponde a la suma del vector de momentos iniciales y el vector de momentos residuales.

$$\mathbf{v}(\mathbf{q}) = \mathbf{v}_{total} = \mathbf{v}(\mathbf{q}_0) + \left(\left. \frac{\partial \mathbf{v}_e(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right|_{\mathbf{q}_0} + \left. \frac{\partial \mathbf{v}_p(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right|_{\mathbf{q}_0} \right) \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) \quad (\text{II.19})$$

$$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_{total} - \mathbf{v}(\mathbf{q}_0) = \mathbf{f}(\mathbf{q}_0) \cdot \Delta \mathbf{q} \quad (\text{II.20})$$

$$\Delta \mathbf{q} = \mathbf{q} - \mathbf{q}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{q}_0)^{-1} \cdot \Delta \mathbf{v} = \mathbf{k}(\mathbf{q}_0) \cdot \Delta \mathbf{v} \quad (\text{II.21})$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 + \Delta \mathbf{q} \quad (\text{II.22})$$

El desarrollo anterior requiere de un proceso iterativo a partir de un vector de momentos iniciales $\mathbf{q}_0$ escogido. El proceso iterativo converge cuando el error numérico (II.23) definido como la norma adimensional del vector de rotaciones residuales con respecto a las rotaciones totales conocidas sea menor que un valor de tolerancia dado.

$$error = \sqrt{\left(\frac{\Delta v_2}{v_{2total}} \right)^2 + \left(\frac{\Delta v_3}{v_{3total}} \right)^2} < tol \quad (\text{II.23})$$

Las expresiones de los parámetros para la iteración n se resumen en la Tabla II-1. Esta iteración se realiza para determinar el vector de momentos $\mathbf{q}_{n+1}$ para un vector de rotaciones

conocidas $\mathbf{v}_{total}$. La iteración n comienza con el vector de momentos $\mathbf{q}_n$ calculado en la iteración $n - 1$ y termina obteniendo el vector de momentos $\mathbf{q}_{n+1}$ para la iteración $n + 1$.

Tabla II-1. Cálculo de parámetros, viga con rótulas M3, iteración n .

Paso	Parámetro	Expresión
1°	Rotaciones elásticas	$\mathbf{v}_e(\mathbf{q}_n) = \mathbf{f}_e \cdot \mathbf{q}_n$
2°	Matriz de flexibilidad plástica	$\mathbf{f}_p(\mathbf{q}_n) = \frac{1}{k_{rot}} \cdot \begin{bmatrix} m_{r2}(q_{2n}) & 0 \\ 0 & m_{r3}(q_{3n}) \end{bmatrix}$
3°	Rotaciones plásticas	$\mathbf{v}_p(\mathbf{q}_n) = \mathbf{f}_p(\mathbf{q}_n) \cdot (\mathbf{q}_n - \mathbf{Q}_p)$
4°	Rotaciones totales	$\mathbf{v}(\mathbf{q}_n) = \mathbf{v}_e(\mathbf{q}_n) + \mathbf{v}_p(\mathbf{q}_n)$
5°	Rotaciones residuales	$\Delta \mathbf{v}_n = \mathbf{v}_{total} - \mathbf{v}(\mathbf{q}_n)$
6°	Revisar convergencia	$error_n = \sqrt{\left(\frac{\Delta v_{2n}}{v_{2total}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta v_{3n}}{v_{3total}}\right)^2} < o > tol$
7°	Matriz de flexibilidad	$\mathbf{f}(\mathbf{q}_n) = \mathbf{f}_e + \mathbf{f}_p(\mathbf{q}_n)$
8°	Matriz de rigidez	$\mathbf{k}(\mathbf{q}_n) = \mathbf{f}(\mathbf{q}_n)^{-1}$
9°	Momentos residuales	$\Delta \mathbf{q}_n = \mathbf{k}(\mathbf{q}_n) \cdot \Delta \mathbf{v}_n$
10°	Momentos totales	$\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_n + \Delta \mathbf{q}_n$

II.2. Viga-columna con rótulas plásticas a flexocompresión

El elemento viga-columna con rótulas plásticas a flexocompresión, en adelante referidas como “rótulas P-M3”, corresponde a uno de la misma sección transversal y longitud que el de la sección II.1. Sin embargo, para este caso el elemento es sometido a carga axial y tiene rótulas P-M3 en sus extremos. El elemento viga-columna tiene un comportamiento elástico-lineal y cuenta con resortes rígido-plásticos con endurecimiento, los cuales corresponden a rótulas P-M3. El elemento tiene dos grados de libertad de rotación, uno en cada extremo y un grado de libertad de desplazamiento horizontal en el extremo derecho, (ver Figura II-4).

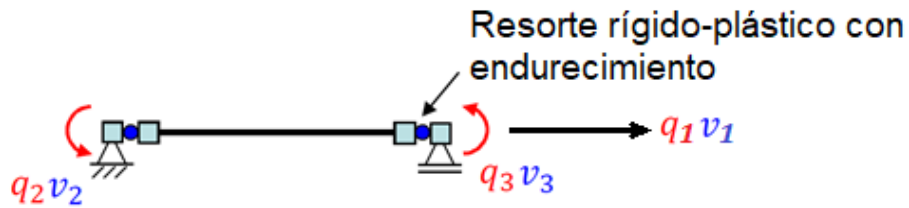


Figura II-4. Viga con rótulas P-M3 y tres grados de libertad (Hube, 2022b)

El vector de deformaciones $\mathbf{v}$ (II.24) tiene una componente elástica $\mathbf{v}_e$ (II.25) y una plástica $\mathbf{v}_p$ (II.26). Por lo tanto, la condición de compatibilidad de deformaciones (ver Figura II-5) corresponde a la igualdad entre las deformaciones totales $\mathbf{v}$ y la suma de las deformaciones elásticas $\mathbf{v}_e$ y plásticas $\mathbf{v}_p$ en función de las cargas $\mathbf{q}$ (II.27). En este caso, la deformación axial total sólo tendrá componente elástica, es decir, $v_{p1} = 0$.

$$\mathbf{v} = [v_1 \quad v_2 \quad v_3]^T \quad (\text{II.24})$$

$$\mathbf{v}_e = [v_{e1} \quad v_{e2} \quad v_{e3}]^T \quad (\text{II.25})$$

$$\mathbf{v}_p = [0 \quad v_{p2} \quad v_{p3}]^T \quad (\text{II.26})$$

$$\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2 \quad q_3]^T \quad (\text{II.27})$$

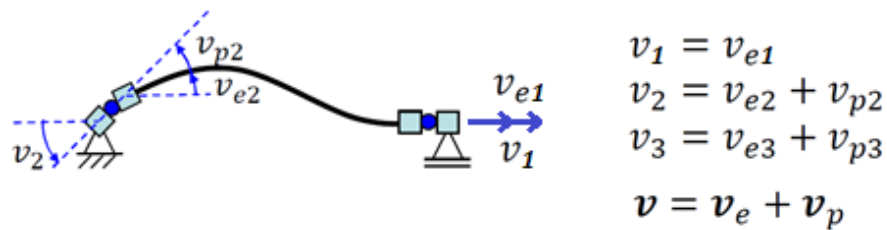


Figura II-5. Compatibilidad de deformaciones. Figura adaptada desde Hube (2022b)

La matriz de rigidez $\mathbf{k}_e$ (II.28) tiene una fila y una columna adicional que el elemento de la parte II.1 debido a la componente axial. La matriz de rigidez, dado que tiene determinante no nulo, es invertible y su inversa es la matriz de flexibilidad elástica de la estructura $\mathbf{f}_e$ (II.29).

$$\mathbf{k}_e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (\text{II.28})$$

$$\mathbf{f}_e = \mathbf{k}_e^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{L}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L}{3EI} & \frac{-L}{6EI} \\ 0 & \frac{-L}{6EI} & \frac{L}{3EI} \end{bmatrix} \quad (\text{II.29})$$

El vector de deformaciones plásticas $\mathbf{v}_p$ puede ser escrito en función de las cargas $\mathbf{q}$ (ver (II.10)). Para que aparezcan deformaciones plásticas, al menos uno de los momentos en las rótulas debe superar el valor límite del momento plástico M_p dentro del vector de cargas plásticas $\mathbf{Q}_p$ (II.30). El valor del momento plástico de la sección, en este caso de estudio, corresponde al valor del momento nominal del diagrama de interacción P-M, para la carga axial nominal a la que la sección transversal esté sometida.

$$\mathbf{Q}_p = \begin{bmatrix} 0 \\ M_p \\ M_p \end{bmatrix} \quad (\text{II.30})$$

$$\mathbf{f}_p(\mathbf{q}) = \frac{1}{k_{rot}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{r2}(q_2) & 0 \\ 0 & 0 & m_{r3}(q_3) \end{bmatrix} \quad (\text{II.31})$$

Tanto el vector de cargas plásticas, como la matriz de flexibilidad plástica $\mathbf{f}_p$ (II.31) en este caso, tienen componentes nulos en la fila y la columna asociada a la deformación axial,

debido a que las rótulas plásticas son únicamente rotacionales. Los parámetros m_{r2} , m_{r3} y k_{rot} ya fueron definidos en las expresiones (II.13), (II.14) y (II.15), respectivamente.

El problema a resolver en esta parte tiene el mismo proceso iterativo determinado por las ecuaciones (II.16) a (II.22) de la parte II.1, con la diferencia de que existe una componente axial.

El vector de deformaciones totales es considerado conocido, al igual que en la parte II.1. Sin embargo, dado que, i) la carga axial P a la que se somete el elemento viga-columna es a priori un dato y que, ii) las rótulas P-M3 son rotacionales, entonces la deformación axial siempre estará en el rango elástico y corresponde a la expresión (II.32).

$$v_{total1} = v_{e1} = \frac{PL}{EA} \quad (II.32)$$

El error numérico de la iteración, en este caso, es la norma adimensional del vector de deformaciones residuales con respecto a las deformaciones totales conocidas. Dado que la deformación axial total es calculada directamente con el valor de la carga axial, entonces el error corresponde a la expresión (II.23). La Tabla II-2 muestra el cálculo de los pasos cuyas expresiones difieren con respecto a los de la Tabla II-1, mientras que los demás parámetros son idénticos.

Tabla II-2. Cálculo de parámetros, viga con rótulas P-M3, iteración n.

Paso	Parámetro	Expresión
2°	Matriz de flexibilidad plástica	$f_p(q_n) = \frac{1}{k_{rot}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{r2}(q_{2n}) & 0 \\ 0 & 0 & m_{r3}(q_{3n}) \end{bmatrix}$

II.3. Rótulas plásticas en SAP2000

El programa SAP2000 considera las rótulas de acuerdo a lo dispuesto en el FEMA 356 (2000). Ese documento propone curvas fuerza – deformación (momento – rotación, momento – curvatura, etc.) para las rótulas que permiten considerar un comportamiento cercano a la realidad. La Figura II-6 muestra gráficos del FEMA 356 (2000), en los cuales la rótula experimenta un endurecimiento de menor rigidez después de alcanzar la fluencia (punto B), hasta la ocurrencia de una caída de la carga (después del punto C) y posteriormente de la rotura.

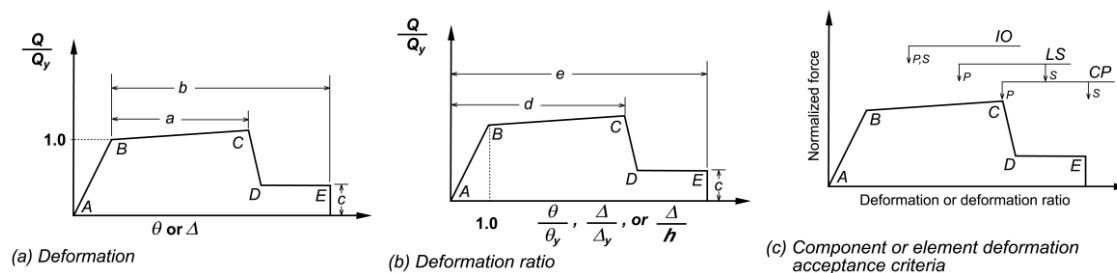


Figura II-6. Fuerza – deformación y criterios de aceptación (FEMA 356, 2000)

Las curvas de la Figura II-6 están incluidas por defecto en el programa SAP2000, en particular en la definición de las curvas de momento – rotación o de momento – curvatura de rótulas plásticas a flexión. La Figura II-7 muestra el esquema de la curva fuerza – deformación del manual del programa SAP2000 (CSi, 2017).

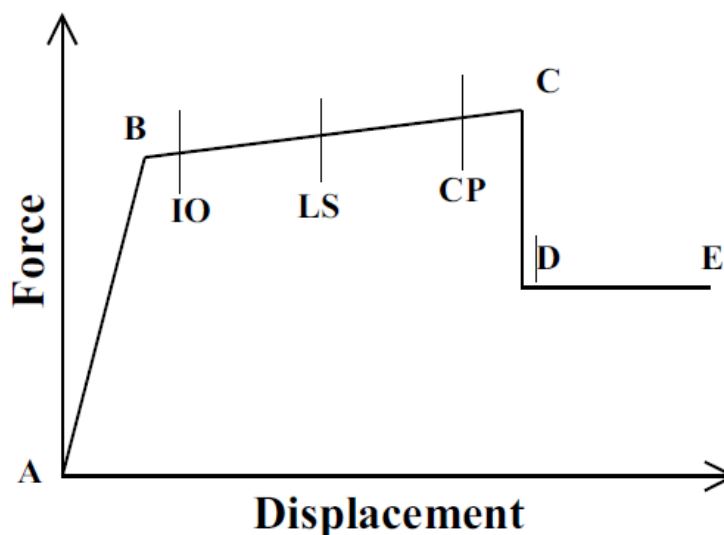


Figure 40
The A-B-C-D-E curve for Force vs. Displacement
The same type of curve is used for Moment vs. Rotation

Figura II-7. Fuerza – deformación de rótulas con control de deformación (CSi, 2017)

El programa SAP2000 (CSi, 2021) tiene disponibles dos tipos de rótulas en relación con el comportamiento de falla: uno con control de fuerza (*Force Controlled*), y otro con control de deformación (*Deformation Controlled*). Las rótulas con control de fuerza permiten modelar elementos con falla frágil (*brittle*), mientras que las rótulas con control de deformación son utilizadas para elementos con falla dúctil (*ductile*).

En SAP2000, es posible usar las curvas del estilo según la Figura II-7 para el tipo de rótula *Deformation Controlled*, o de falla dúctil. El comportamiento dúctil de la rótula implica que, al ser alcanzado el límite de momento plástico en el punto B, el elemento continúa deformándose con algún nivel menor de rigidez entre puntos B y C, hasta una caída de carga entre C y D, y posteriormente la rotura en E (ver referencia a puntos en Figura II-7).

III. VALIDACIÓN ELEMENTO VIGA CON RÓTULAS M3

Este capítulo contiene el análisis del elemento viga con rótulas M3 y consta de tres secciones. La sección III.1 presenta los datos y propiedades del elemento viga. Luego, III.2 muestra el análisis y resultados del problema en Excel y finalmente, III.3 contiene la validación en el programa SAP2000 (CSi, 2021) del elemento viga con rótulas M3, mediante las consideraciones de modelación y la comparación de resultados con Excel.

III.1. Ejemplo de estudio

El ejemplo de esta sección considera una viga simplemente apoyada de hormigón armado con rótulas M3 en ambos extremos. Esta característica es representada a través de rótulas rotacionales (ver Figura III-1). Los datos del problema están en la Tabla III-1.

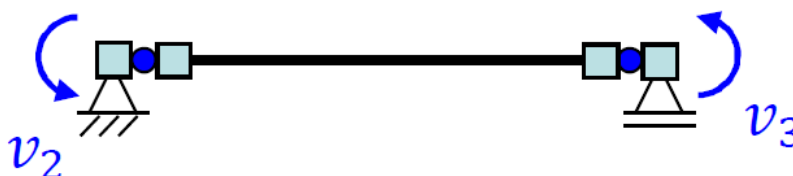


Figura III-1. Viga con rótulas M3 y dos grados de libertad (Hube, 2022b)

Tabla III-1. Datos del problema.

Parámetros	Valores
Ancho de la viga	$b = 60 \text{ cm}$
Altura de la viga	$h = 80 \text{ cm}$
Luz de la viga	$L = 1000 \text{ cm}$
Módulo de elasticidad H.A.	$E = 300 \frac{\text{tonf}}{\text{cm}^2}$
Resistencia a compresión del hormigón	$f'_c = 0,3 \frac{\text{tonf}}{\text{cm}^2}$

Momento plástico de la rótula	$M_p = 11224 \text{ tonf} \cdot \text{cm}$
Constante de endurecimiento	$\eta = 0,05$
Rotación final, extremo izquierdo	$v_{total2} = 0,008$
Rotación final, extremo derecho	$v_{total3} = 0,006$

El detalle de la sección transversal de la viga se muestra en el Anexo A. El momento plástico M_p (ver valor en Tabla III-1) corresponde al valor que toma el momento nominal M_n cuando la carga axial nominal es $P_n = 0$ en el diagrama de interacción P-M de la sección. El diagrama de interacción P-M y los datos de este diagrama están disponibles en el Anexo A.

III.2. Solución en Excel

Esta sección presenta los resultados del análisis iterativo realizado en Excel. La Tabla III-2 muestra parámetros definidos en la planilla y la Tabla III-3 contiene las matrices elásticas de rigidez y de flexibilidad de la viga.

Tabla III-2. Parámetros de cálculo.

$I = 1/12 b h^3 =$	2560000	cm ⁴
$EI =$	768000000	tonf-cm ²
$EI/L =$	768000	tonf-cm
$krot = \eta * 6EI/L =$	230400	tonf-cm

Tabla III-3. Matrices de rigidez y flexibilidad elásticas.

Matriz de rigidez elástica			
ke =	3072000	1536000	tonf cm
	1536000	3072000	
Matriz de flexibilidad elástica			
fe =	4,3403E-07	-2,1701E-07	1/tonf/cm
	-2,1701E-07	4,3403E-07	

La Tabla III-4 muestra un resumen de los resultados de las iteraciones del proceso. La convergencia se logra luego de dos iteraciones. El Anexo B detalla las iteraciones realizadas hasta conseguir la convergencia. La Tabla VIII-1 a la Tabla VIII-3 del Anexo B muestran los cálculos de los parámetros de cada iteración hasta conseguir la convergencia.

Tabla III-4. Cálculo de las iteraciones para viga columna con rótulas M3.

n	0	1	2
q2, tonf cm	10000	33792	12426.12
q3, tonf cm	10000	30720	12025.42
v2, rad	0.002170139	0.10595026	0.008
v3, rad	0.002170139	0.090616927	0.006
Δv2, rad	0.005829861	-0.09795026	0
Δv3, rad	0.003829861	-0.084616927	2.08167E-17
error	0.96875753	18.67618197	3.46945E-15
Δq2, tonf cm	23792	-21365.88	1.98599E-13
Δq3, tonf cm	20720	-18694.58	4.36918E-12

La Tabla III-5 muestra los valores resultantes del vector de momentos, la matriz de rigidez tangente de la viga y los vectores de rotaciones elástica y plástica. La Tabla III-4 muestra, en la última iteración, que ambas rótulas alcanzan la fluencia, dado que los momentos de los extremos superan el momento plástico $M_p = 11224 \text{ tonf cm}$. La condición anterior genera rotaciones plásticas en las rótulas M3.

Tabla III-5. Resumen de resultados.

Resultados	Valores
Vector de momentos	$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12426 \\ 12025 \end{bmatrix} \text{ tonf cm}$
Matriz de rigidez	$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 209888 & 9540 \\ 9540 & 209888 \end{bmatrix} \text{ tonf cm}$
Vector de rotaciones elásticas	$\mathbf{v}_e = \begin{bmatrix} v_{e2} \\ v_{e3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,002783597 \\ 0,002522727 \end{bmatrix} \text{ rad}$
Vector de rotaciones plásticas	$\mathbf{v}_p = \begin{bmatrix} v_{p2} \\ v_{p3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,005216403 \\ 0,003477273 \end{bmatrix} \text{ rad}$

Como se mencionó anteriormente, ambas rótulas alcanzan la fluencia. El aumento del momento con respecto al momento plástico en el apoyo izquierdo es de un 10,7%, mientras que en el derecho es de 7,1%. A su vez, la rotación plástica en la rótula del apoyo izquierdo representa el 65,2% de la rotación total, mientras que, en el apoyo derecho, alcanza el 58%.

III.3. Validación en SAP2000

Esta sección describe tanto el modelamiento, como las consideraciones para el análisis no lineal en SAP2000 (CSI, 2021) del elemento viga simplemente apoyada con rótulas M3 en sus extremos, sometidas a momentos flectores. En primer lugar, III.3.1 resume el modelamiento estructural en el programa SAP2000 y posteriormente, 0 explica la metodología para crear y asignar rótulas M3 en el elemento a analizar.

III.3.1. Modelo estructural

La Figura III-2 muestra el modelo de la viga simplemente apoyada a analizar en SAP2000. El modelo está compuesto por un elemento *frame* que representa a la viga. La geometría y materialidad de la viga son los indicados en la Tabla III-1. La viga tiene rótulas M3 asignadas en los extremos, lo cual se desarrolla en III.3.2.

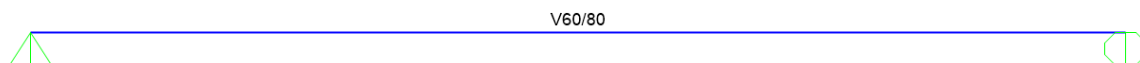


Figura III-2. Modelo en SAP2000 de la viga simplemente apoyada.

La Figura III-3 muestra la definición del *Load Pattern* llamado “MOMENT”. Lo anterior permite asignar momentos puntuales en los extremos de la viga. El *Load Pattern* “DEAD”, que viene por defecto en el programa SAP2000, es eliminado para no considerar el peso propio.

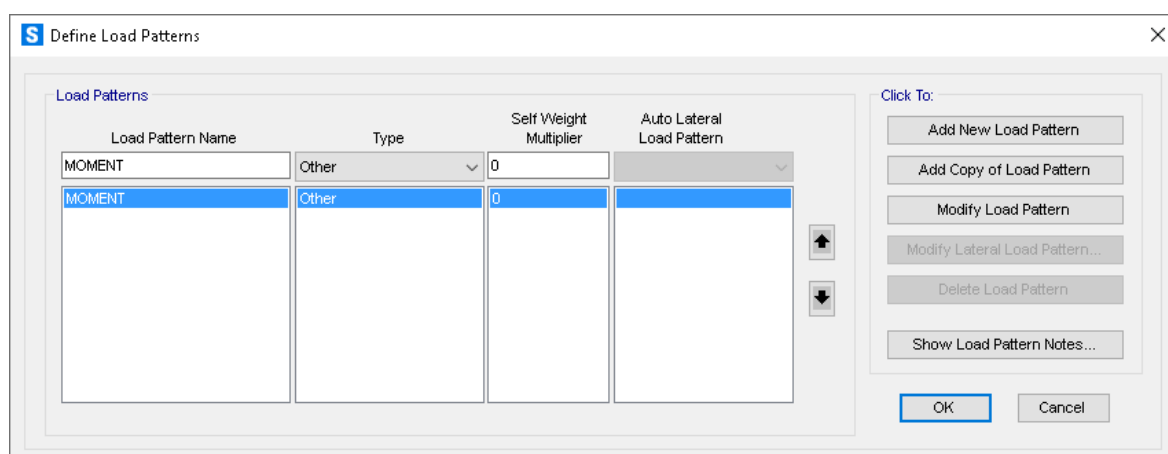


Figura III-3. Load Pattern “MOMENT”.

El *Load Pattern* “MOMENT” es utilizado para crear el *Load Case* nombrado como “MOMENT_NL” configurado para análisis no lineal estático (ver Figura III-4). Con lo anterior, las rótulas tienen la capacidad de desarrollar rotaciones plásticas. En el modelo de SAP2000, las cargas que son aplicadas en la viga corresponden a los momentos flectores obtenidos en el proceso iterativo realizado en Excel (ver Tabla III-5 y Figura III-5).

S Load Case Data - Nonlinear Static

Load Case Name
MOMENT_NL Set Def Name Modify/Show...

Initial Conditions
☒ Zero Initial Conditions - Start from Unstressed State
☐ Continue from State at End of Nonlinear Case ▼
 Important Note: Loads from this previous case are included in the current case

Modal Load Case
All Modal Loads Applied Use Modes from Case ▼

Loads Applied

Load Type	Load Name	Scale Factor
Load Pattern ▼	MOMENT ▼	1,
Load Pattern	MOMENT	1,

Add Modify Delete

Other Parameters
 Load Application: Full Load Modify/Show...
 Results Saved: Multiple States Modify/Show...
 Nonlinear Parameters: Default Modify/Show...

Load Case Type
Static Design...

Analysis Type
☐ Linear
☒ Nonlinear

Geometric Nonlinearity Parameters
☒ None
☐ P-Delta
☐ P-Delta plus Large Displacements

Mass Source
Previous ▼

OK Cancel

Figura III-4. Load Case “MOMENT_NL”.

Menú *Define* → *Load Cases...* → *Add New Load Case...*
 Seleccionar *Analysis Type: Nonlinear*

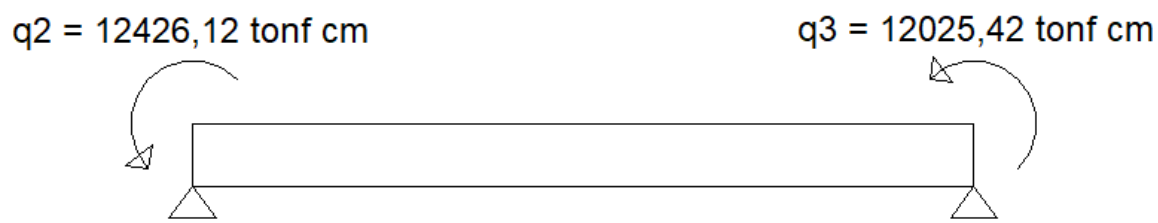


Figura III-5. Momentos aplicados en la viga, Load Pattern “MOMENT”.

III.3.2. Rótulas plásticas M3

El caso del elemento viga con rótulas flexurales en los extremos considera el tipo de rótula *Moment M3* con deformación controlada. La Figura III-6 muestra la ventana de SAP2000 para crear una rótula M3. El programa SAP2000 incluye la opción de ingresar puntos para definir la curva de momento – rotación de la rótula plástica. La Figura III-7 muestra la ventana del programa SAP2000 que permite definir dicha curva.

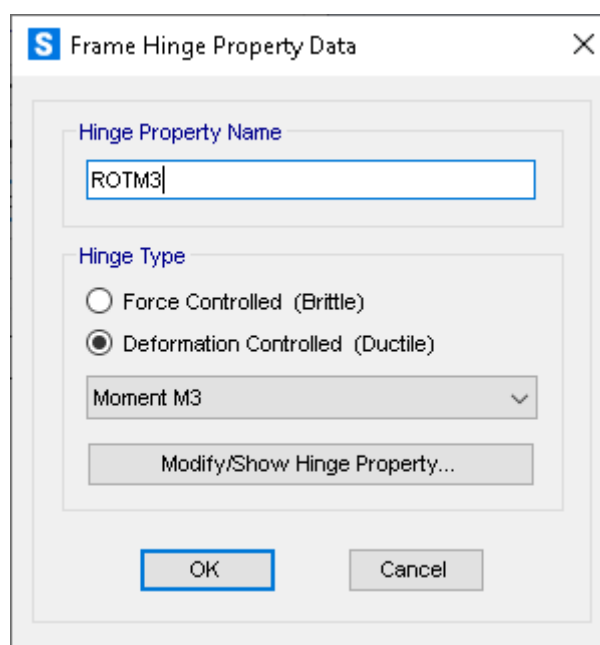


Figura III-6. Definición de rótula M3 en SAP2000.

Menú *Define* → *Section Properties* → *Hinge Properties...* → *Add New Property...*
Seleccionar *Use Defaults For: User Defined*
Seleccionar *Hinge Type: Deformation Controlled (Ductile)* → *Moment M3*

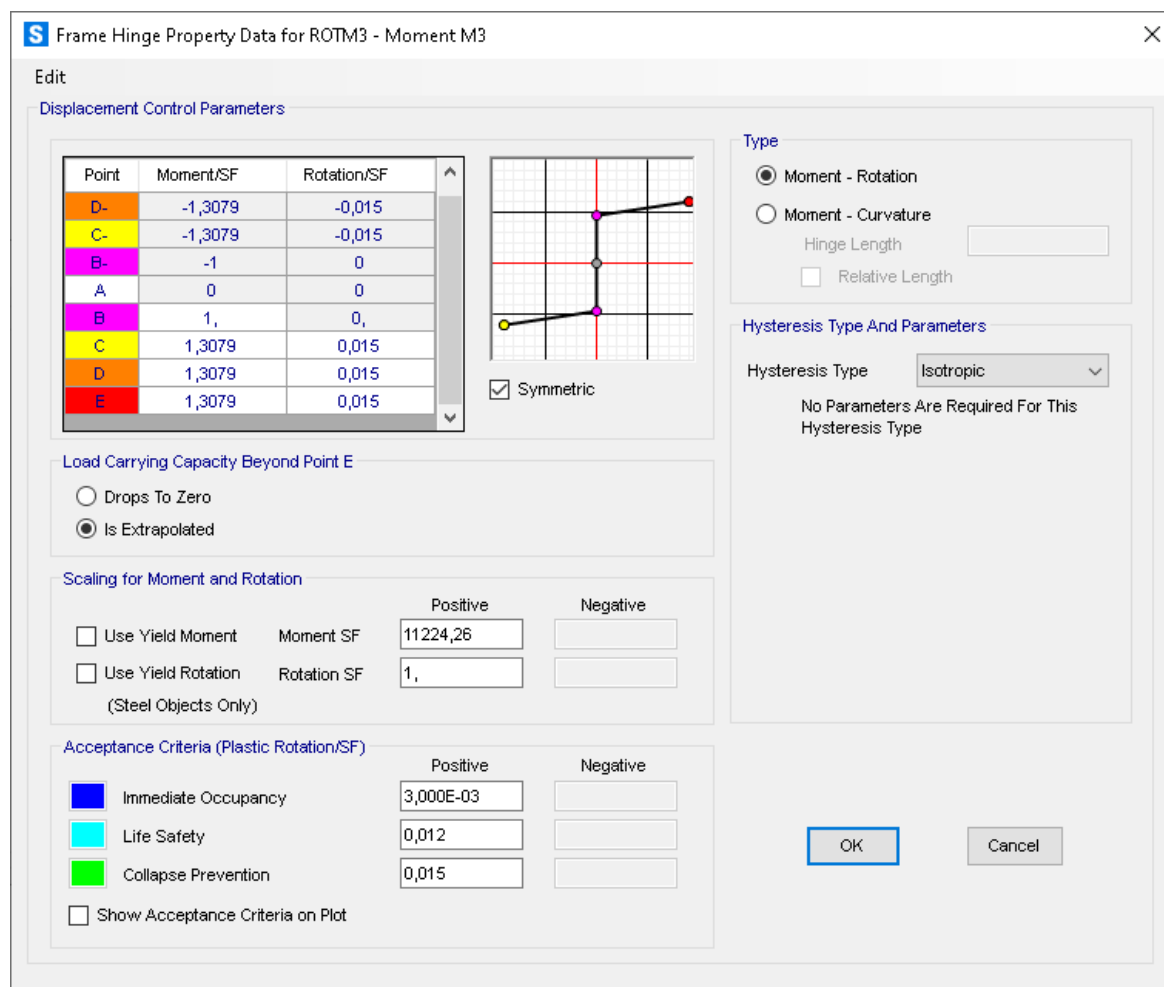


Figura III-7. Curva momento – rotación de rótula M3.

Menú *Define* → *Section Properties* → *Hinge Properties...* → *Add New Property...*
 Seleccionar *Use Defaults For: User Defined*
 Seleccionar *Hinge Type: Deformation Controlled (Ductile)* → *Moment M3*
 Seleccionar *Modify/Show Hinge Property...*

La ventana de SAP2000 de la Figura III-7 presenta la relación momento – rotación de la rótula plástica en valores adimensionales normalizados por el momento plástico y una rotación de fluencia dada arbitrariamente. El punto B del gráfico de la Figura III-7 representa, en la ordenada, el momento plástico junto con una rotación plástica nula en la abscisa. La abscisa del punto C es la rotación del criterio de aceptación de prevención de colapso que, por defecto, SAP2000 la fija en 0,015, pero puede ser modificado

arbitrariamente (ver Tabla III-6). Los puntos D y E pueden ser fijados en las mismas coordenadas del punto C. Finalmente es necesario seleccionar la opción para extrapolar la capacidad de carga más allá del punto E del gráfico para que cubra todos los niveles de deformación que puedan alcanzarse durante el análisis. La Tabla III-6 muestra el detalle del cálculo de los puntos B y C para lograr una rigidez post-fluencia equivalente a la considerada en el ejemplo realizado en Excel (ver Figura II-3).

Tabla III-6. Cálculo de punto C de curva momento – rotación.

Parámetros	Valores
Momento plástico, punto B	$Moment_{SF} = M_p = 11224,26 \text{ tonf} \cdot \text{cm}$
Rotación, punto C	$\theta_c = 0,015 \text{ rad}$ (default)
Momento, punto C	$Moment_c = M_p + k_{rot} \cdot \theta_c$ $= 11224,26 + 230400 \cdot 0,015 = 14680,26 \text{ tonf} \cdot \text{cm}$
Momento normalizado, punto C	$\frac{Moment_c}{SF} = \frac{14680,26}{11224,26} = 1,3079$

Para la rótula con control de deformación se puede usar una curva de momento – rotación o una de momento – curvatura. Las rótulas M3 consideran una curva de momento – rotación. Las rótulas M3 son asignadas a los extremos de la viga indicando las distancias relativas a éstos, normalizadas por la longitud del elemento (ver Figura III-8). El apoyo izquierdo corresponde a una distancia relativa igual a 0 y el apoyo derecho a una igual a 1.

S Assign Frame Hinges

Frame Hinge Assignment Data

Hinge Property	Location Type	Relative Distance	Absolute Distance cm
ROTM3	Relative To Clear Length	1	
ROTM3	Relative To Clear Length	0	
ROTM3	Relative To Clear Length	1	

Add Hinge...
Modify Hinge...
Delete Hinge

Current Hinge Information
Type: User Defined
DOF: Interacting P-M3

Options

☐ Add Specified Hinge Assigns to Existing Hinge Assigns
☒ Replace Existing Hinge Assigns with Specified Hinge Assigns

Existing Hinge Assignments on Currently Selected Frame Objects
Number of Selected Frame Objects: 1
Total Number of Hinges on All Selected Frame Objects: 2
All 2 existing hinge assignments will be removed when the above hinge assignment is applied

Fill Form with Hinges on Selected Frame Object

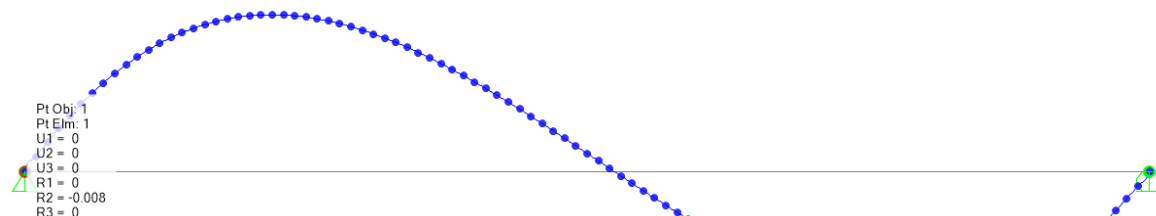
OK Close Apply

Figura III-8. Asignación de rótulas M3 a la viga.

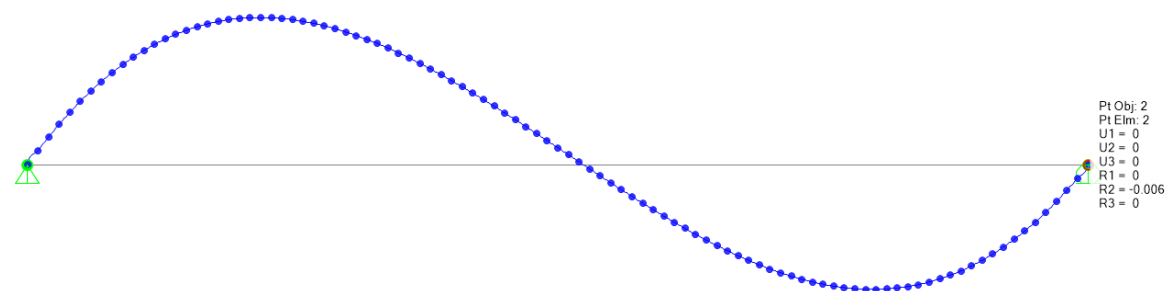
Menú Assign → Frame → Hinges...
Indicar *Relative Distance* = 0 (apoyo izquierdo) → Add Hinge...
Indicar *Relative Distance* = 1 (apoyo derecho) → Add Hinge...

III.3.3. Resultados del análisis estático no lineal

La Figura III-9 muestra la deformada de la viga sometida a los momentos calculados en Excel (ver Tabla III-5) con los valores de las rotaciones totales en cada extremo de la viga.



(a) Rotación apoyo izquierdo $v_2 = 0,008 \text{ rad}$



(b) Rotación en apoyo derecho $v_3 = 0,006 \text{ rad}$

Figura III-9. Deformada de viga, *Load Case* “MOMENT_NL”.

La Tabla III-7 muestra las rotaciones plásticas obtenidas en las rótulas debido a la aplicación de los momentos en los extremos. La Tabla III-8 presenta una comparación de los resultados de los análisis no lineales tanto de Excel como de SAP2000. En esta tabla, las deformaciones están mostradas en valor absoluto. En la Tabla III-8, se observa que la rotación total de cada rótula obtenida en SAP2000 es idéntica a la calculada en Excel. Con respecto a las componentes elástica y plástica de la rotación de las rótulas, no se obtiene diferencia entre los resultados de Excel y SAP2000.

Tabla III-7. Resultados en rótulas plásticas, *Load Case* “MOMENT_NL”.

TABLE: Frame Hinge States								
Frame	OutputCase	CaseType	AssignHinge	GenHinge	RelDist	AbsDist	M3	R3Plastic
Text	Text	Text	Text	Text	Unitless	cm	Tonf-cm	Radians
1	MOMENT_NL	NonStatic	ROTM3	1H1	0	0	-12426,12	-0,005216
1	MOMENT_NL	NonStatic	ROTM3	1H2	1	1000	12025,42	0,003477

Tabla III-8. Comparación resultados análisis no lineal.

Parámetro	Valor en Excel	Valor en SAP2000	Diferencia % SAP2000/Excel
Rotación total, izq.	0.008000	0.008000	0%
Rotación total, der.	0.006000	0.006000	0%
Rotación plástica, izq.	0.005216	0.005216	0%
Rotación plástica, der.	0.003477	0.003477	0%
Rotación elástica, izq.	0.002784	0.002784	0%
Rotación elástica, der.	0.002523	0.002523	0%

IV. VALIDACIÓN VIGA-COLUMNA CON RÓTULAS P-M3

Este capítulo contiene el análisis del elemento viga-columna con rótulas P-M3 y consta de tres secciones. La sección IV.1III.1 muestra los datos y propiedades del elemento viga y la presentación de casos a analizar en función de la carga axial aplicada. La sección 0 muestra el análisis y resultados del problema en Excel. Finalmente, la sección IV.3 contiene la validación en el programa SAP2000 del elemento viga-columna con rótulas P-M3, mediante las consideraciones de modelación y la comparación de resultados con Excel.

IV.1. Ejemplo de estudio

El ejemplo de esta sección es un elemento viga-columna simplemente apoyada de hormigón armado con rótulas P-M3 (ver Figura IV-1). Los datos del problema son los mismos del elemento analizado en el capítulo III y están en la Tabla III-1.

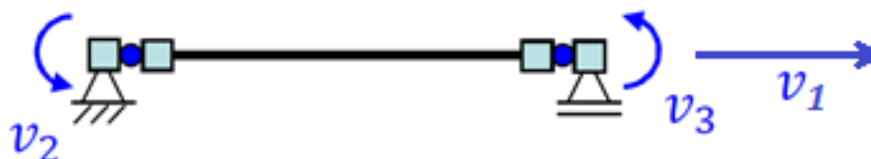


Figura IV-1. Viga-columna, rótulas P-M3 y tres grados de libertad (Hube, 2022b)

Para efectos de esta validación se analizan tres casos:

- Elemento sin carga axial y comparación con análisis del capítulo III.
- Elemento sometido a carga axial de 10% de su capacidad de compresión.
- Elemento sometido a carga axial de 20% de su capacidad de compresión.

IV.2. Solución en Excel

Esta sección presenta los resultados del análisis iterativo en Excel para los tres casos de carga axial. La Tabla IV-1 muestra los datos de geometría y rigideces axial y flexural de la viga. La Tabla IV-2 contiene las matrices elásticas de rigidez y de flexibilidad.

Tabla IV-1. Parámetros de cálculo.

$A = b h =$	4800	cm ²
$EA =$	1440000	tonf
$EA/L =$	1440	tonf/cm
$I = 1/12 b h^3 =$	2560000	cm ⁴
$EI =$	768000000	tonf cm ²
$EI/L =$	768000	tonf cm
$krot = \eta * 6EI/L =$	230400	tonf cm

Tabla IV-2. Matrices de rigidez y flexibilidad elásticas.

Matriz de rigidez elástica			
ke =	1440	0	0
	0	3072000	1536000
	0	1536000	3072000
Matriz de flexibilidad elástica			
fe =	0.000694444	0	0
	0	4.34028E-07	-2.17014E-07
	0	-2.17014E-07	4.34028E-07

Utilizando el diagrama de interacción de la sección (ver Anexo A) es posible estimar el momento plástico de la sección utilizando una interpolación lineal entre puntos del diagrama de interacción P-M3. La Tabla IV-3 resume los momentos plásticos para las cargas axiales de los tres casos analizados.

Tabla IV-3. Momentos plásticos según carga axial.

Caso	$Pn/f'cAg$	Pn tonf	Mn tonf cm
a)	0	0	11224.26
b)	0.1	-144	14832.03
c)	0.2	-288	17305.82

IV.2.1. Caso de flexión pura

La Tabla IV-4 muestra la carga axial a ser considerada y las deformaciones totales del problema. En particular, la deformación axial es la que corresponde al rango elástico debido a que las rótulas son únicamente rotacionales.

Tabla IV-4. Carga axial $P=0$ y deformaciones totales.

Nivel de carga axial		
$P/f'c A =$	0	
$P =$	0	tonf
Vector de deformaciones totales		
$v \text{ total} =$	0	cm
	0.008	rad
	0.006	

La Tabla IV-5 muestra un resumen de los resultados de las iteraciones del proceso. El capítulo VIII detalla las iteraciones realizadas hasta conseguir la convergencia de los resultados. La Tabla VIII-4 a la Tabla VIII-6 del Anexo B muestran los parámetros de cada iteración del proceso.

Tabla IV-5. Cálculo de las iteraciones, $P=0$.

n	0	1	2
q1, tonf	-1000	0	0
q2, tonf cm	10000	33792	12426.12
q3, tonf cm	10000	30720	12025.42
Mp, tonf cm	14433.36	11224.26	11224.26
v1, cm	-0.6944444444	0	0

v2, rad	0.002170139	0.10595026	0.008
v3, rad	0.002170139	0.090616927	0.006
$\Delta v1$, cm	0.694444444	0	0
$\Delta v2$, rad	0.005829861	-0.09795026	0
$\Delta v3$, rad	0.003829861	-0.084616927	2.08167E-17
error	0.96875753	18.67618197	3.46945E-15
$\Delta q1$, tonf	1000	0	0
$\Delta q2$, tonf cm	23792	-21365.88	1.98599E-13
$\Delta q3$, tonf cm	20720	-18694.58	4.36918E-12

La Tabla IV-6 muestra los valores resultantes del vector de cargas, momento plástico, la matriz de rigidez de la viga y los vectores de deformaciones en rango elástico y en rango plástico. En la última iteración ambas rótulas alcanzan la fluencia al ser superado el momento plástico.

Tabla IV-6. Resumen de resultados, P=0.

Resultados	Valores
Vector de cargas	$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 12426 \text{ tonf cm} \\ 12025 \text{ tonf cm} \end{bmatrix}$
Momento plástico	$M_p = 11224 \text{ tonf}$
Matriz de rigidez	$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 1440/cm^2 & 0 & 0 \\ 0 & 209888 & 9540 \\ 0 & 9540 & 209888 \end{bmatrix} \text{ tonf cm}$
Vector de deformaciones elásticas	$\mathbf{v}_e = \begin{bmatrix} v_{e1} \\ v_{e2} \\ v_{e3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,002783597 \text{ rad} \\ 0,002522727 \text{ rad} \end{bmatrix}$
Vector de deformaciones plásticas	$\mathbf{v}_p = \begin{bmatrix} v_{p1} \\ v_{p2} \\ v_{p3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,005216403 \text{ rad} \\ 0,003477273 \text{ rad} \end{bmatrix}$

Los resultados obtenidos en Excel son idénticos numéricamente a los obtenidos en la sección III.2 correspondiente a la viga simplemente apoyada con rótulas M3 y sólo un grado de

libertad de rotación en cada extremo. Lo anterior es debido a que el comportamiento axial es elástico y a que la matriz de rigidez tiene sus componentes flexurales y axiales desacoplados.

IV.2.2. Caso de flexocompresión a 10% de capacidad axial

La Tabla IV-7 muestra la carga axial a ser considerada y las deformaciones totales del problema. La deformación axial corresponde a la deformación axial elástica de la sección según la ecuación (II.32).

Tabla IV-7. Carga axial $P=10\% f'_c A$ y deformaciones totales.

Nivel de carga axial		
$P/f'_c A =$	10%	
$P =$	-144	tonf
Vector de deformaciones totales		
$v \text{ total} =$	-0.1	cm
	0.008	rad
	0.006	

La Tabla IV-8 muestra un resumen de los resultados de las iteraciones del proceso. El capítulo VIII detalla las iteraciones realizadas hasta conseguir la convergencia de los resultados. La Tabla VIII-7 a la Tabla VIII-9 del Anexo B muestran los parámetros de cada iteración del proceso. La Tabla IV-9 muestra las cargas totales, el momento plástico según la carga axial, la matriz de rigidez de la estructura y las deformaciones elásticas y plásticas.

Tabla IV-8. Cálculo de las iteraciones, $P=10\% f'_c A$.

n	0	1	2
q1, tonf	-1000	-144	-144
q2, tonf cm	10000	33792	15862.09
q3, tonf cm	10000	30720	15461.39
Mp, tonf cm	14433.36	14832.03	14832.03

v1, cm	-0.6944444444	-0.1	-0.1
v2, rad	0.002170139	0.090291544	0.008
v3, rad	0.002170139	0.074958211	0.006
Δv1, cm	0.5944444444	0	0
Δv2, rad	0.005829861	-0.082291544	-1.38778E-17
Δv3, rad	0.003829861	-0.068958211	9.54098E-18
error	6.022865672	15.42403209	2.35327E-15
Δq1, tonf	856	0	0
Δq2, tonf cm	23792	-17929.91	-2.82176E-12
Δq3, tonf cm	20720	-15258.61	1.87014E-12

Tabla IV-9. Resumen de resultados, $P=10\% f_c A$.

Resultados	Valores
Vector de cargas	$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -144 \text{ tonf} \\ 15862 \text{ tonf cm} \\ 15461 \text{ tonf cm} \end{bmatrix}$
Momento plástico	$M_p = 14832 \text{ tonf}$
Matriz de rigidez	$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 1440/cm^2 & 0 & 0 \\ 0 & 209888 & 9540 \\ 0 & 9540 & 209888 \end{bmatrix} \text{ tonf cm}$
Vector de deformaciones elásticas	$\mathbf{v}_e = \begin{bmatrix} v_{e1} \\ v_{e2} \\ v_{e3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,1 \text{ cm} \\ 0,00352925 \text{ rad} \\ 0,003268381 \text{ rad} \end{bmatrix}$
Vector de deformaciones plásticas	$\mathbf{v}_p = \begin{bmatrix} v_{p1} \\ v_{p2} \\ v_{p3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,00447075 \text{ rad} \\ 0,002731619 \text{ rad} \end{bmatrix}$

En el problema estudiado, ambas rótulas alcanzan la fluencia. El aumento del momento con respecto al momento plástico en el apoyo izquierdo es de un 6,9%, mientras que en el derecho es de 4,2%. A su vez, la rotación plástica en la rótula del apoyo izquierdo representa el 55,9% de la rotación total, mientras que, en el apoyo derecho, corresponde al 45,5%.

IV.2.3. Caso de flexocompresión a 20% de capacidad axial

La Tabla IV-10 muestra la carga axial a aplicar y las deformaciones totales de la estructura. En particular, la deformación axial es la calculada para rango elástico, al igual que en el caso de IV.2.2.

Tabla IV-10. Carga axial $P=20\% f_c A$ y deformaciones totales.

Nivel de carga axial		
$P/f_c A =$	20%	
$P =$	-288	tonf
Vector de deformaciones totales		
$v \text{ total} =$	-0.2	cm
	0.008	rad
	0.006	

La Tabla IV-11 muestra un resumen de los resultados de las iteraciones del proceso. El Anexo B detalla las iteraciones realizadas hasta conseguir la convergencia de los resultados. La Tabla VIII-10 a la Tabla VIII-12 del Anexo B muestran los parámetros de cada iteración del proceso. La Tabla IV-12 muestra las cargas totales, el momento plástico según la carga axial, la matriz de rigidez de la estructura y las deformaciones elásticas y plásticas.

Tabla IV-11. Cálculo de las iteraciones, $P=20\% f_c A$.

n	0	1	2
q1, tonf	-1000	-288	-288
q2, tonf cm	10000	33792	18218.08
q3, tonf cm	10000	30720	17817.39
Mp, tonf cm	14433.36	17305.82	17305.82
v1, cm	-0.6944444444	-0.2	-0.2
v2, rad	0.002170139	0.079554601	0.008
v3, rad	0.002170139	0.064221267	0.006
$\Delta v1$, cm	0.4944444444	0	0
$\Delta v2$, rad	0.005829861	-0.071554601	0
$\Delta v3$, rad	0.003829861	-0.058221267	6.93889E-18

error	2.655254012	13.19695907	1.15648E-15
Δq_1, tonf	712	0	0
Δq_2, tonf cm	23792	-15573.92	6.61996E-14
Δq_3, tonf cm	20720	-12902.61	1.45639E-12

Tabla IV-12. Resumen de resultados, $P=20\% f_c A$.

Resultados	Valores
Vector de cargas	$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -288 \text{ tonf} \\ 18218 \text{ tonf cm} \\ 17817 \text{ tonf cm} \end{bmatrix}$
Momento plástico	$M_p = 17306 \text{ tonf}$
Matriz de rigidez	$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 1440/cm^2 & 0 & 0 \\ 0 & 209888 & 9540 \\ 0 & 9540 & 209888 \end{bmatrix} \text{ tonf cm}$
Vector de deformaciones elásticas	$\mathbf{v}_e = \begin{bmatrix} v_{e1} \\ v_{e2} \\ v_{e3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,2 \text{ cm} \\ 0,004040533 \text{ rad} \\ 0,003779664 \text{ rad} \end{bmatrix}$
Vector de deformaciones plásticas	$\mathbf{v}_p = \begin{bmatrix} v_{p1} \\ v_{p2} \\ v_{p3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,003959467 \text{ rad} \\ 0,002220336 \text{ rad} \end{bmatrix}$

En el problema estudiado, ambas rótulas alcanzan la fluencia. El aumento del momento con respecto al momento plástico en el apoyo izquierdo es de un 5,3%, mientras que en el derecho es de 3%. A su vez, la rotación plástica en la rótula del apoyo izquierdo representa el 49,5% de la rotación total, mientras que, en el apoyo derecho, corresponde al 37%.

IV.3. Validación en SAP2000

Esta sección describe tanto el modelamiento, como las consideraciones para el análisis no lineal en SAP2000 del elemento viga-columna con rótulas plásticas P-M3 en sus extremos, sometidas a momentos flectores y carga axial. En primer lugar, esta sección presenta un

resumen del modelamiento estructural en el programa y posteriormente, una explicación de la metodología para la creación y asignación de rótulas plásticas P-M3 en el elemento a analizar.

IV.3.1. Modelo estructural

El modelo estructural elaborado en esta sección corresponde, en términos de geometría y materialidad, al mismo de la Figura III-2. La geometría y materialidad de la viga son los indicados en la Tabla III-1, salvo por el valor del momento plástico, el cual depende de la carga axial aplicada.

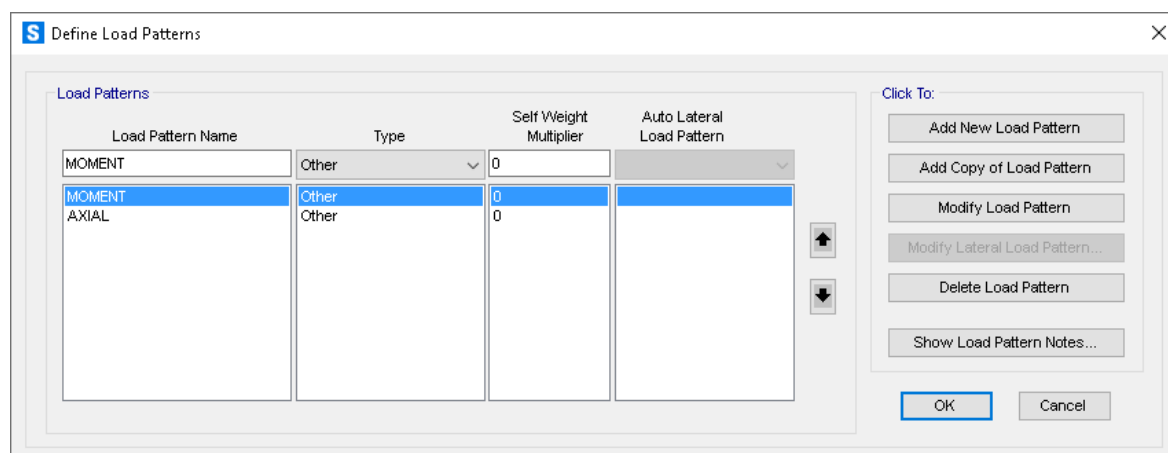


Figura IV-2. Load Pattern “MOMENT” y “AXIAL”.

Menú *Define* → *Load Patterns...*

La Figura IV-2 muestra la definición de *Load Pattern* llamados “MOMENT” y “AXIAL”. Esta definición permite asignar momentos y cargas axiales puntuales en los extremos de la viga. El *Load Pattern* “DEAD”, que viene por defecto en el programa SAP2000, es eliminado para no considerar el peso propio. El *Load Pattern* “AXIAL” es utilizado para crear el *Load Case* nombrado como “AXIAL_NL” configurado para análisis no lineal estático (ver Figura IV-3).

Load Case Data - Nonlinear Static

Load Case Name: AXIAL_NL **Set Def Name** **Notes:** Modify/Show...

Initial Conditions:
☒ Zero Initial Conditions - Start from Unstressed State
☐ Continue from State at End of Nonlinear Case
 Important Note: Loads from this previous case are included in the current case

Modal Load Case: All Modal Loads Applied Use Modes from Case

Loads Applied:

Load Type	Load Name	Scale Factor
Load Pattern	AXIAL	1.
Load Pattern	AXIAL	1.

Add **Modify** **Delete**

Other Parameters:
 Load Application: Full Load **Modify/Show...**
 Results Saved: Multiple States **Modify/Show...**
 Nonlinear Parameters: Default **Modify/Show...**

Load Case Type: Static **Design...**

Analysis Type:
☐ Linear
☒ Nonlinear

Geometric Nonlinearity Parameters:
☒ None
☐ P-Delta
☐ P-Delta plus Large Displacements

Mass Source: Previous

OK **Cancel**

Figura IV-3. Load Case “AXIAL_NL”.

Menú *Define* → *Load Cases...* → *Add New Load Case...*
 Seleccionar *Analysis Type: Nonlinear*

El *Load Pattern* “MOMENT” es utilizado para crear el *Load Case* nombrado como “P+M_NL”, también configurado para análisis no lineal estático (ver Figura IV-4). Este *Load Case* debe considerar una condición inicial correspondiente al *Load Case* anteriormente definido “AXIAL_NL”. Con las definiciones anteriores, las rótulas P-M3 tienen la capacidad de desarrollar rotaciones plásticas al estar siendo sometidas a flexocompresión.

S Load Case Data - Nonlinear Static

Load Case Name

Initial Conditions
☐ Zero Initial Conditions - Start from Unstressed State
☒ Continue from State at End of Nonlinear Case
Important Note: Loads from this previous case are included in the current case

Modal Load Case
 All Modal Loads Applied Use Modes from Case

Loads Applied

Load Type	Load Name	Scale Factor
Load Pattern	MOMENT	1,
Load Pattern	MOMENT	1,

Other Parameters

Load Application	Full Load	<input <="" td="" type="button" value="Modify/Show..."/>
Results Saved	Multiple States	<input <="" td="" type="button" value="Modify/Show..."/>
Nonlinear Parameters	Default	<input <="" td="" type="button" value="Modify/Show..."/>

Load Case Type

Analysis Type
☐ Linear
☒ Nonlinear

Geometric Nonlinearity Parameters
☒ None
☐ P-Delta
☐ P-Delta plus Large Displacements

Mass Source

Figura IV-4. Load Case “P+M_NL”.

Menú Define → Load Cases... → Add New Load Case...
 Seleccionar Initial Conditions: Continue from State at End of Nonlinear Case: AXIAL_NL
 Seleccionar Analysis Type: Nonlinear

IV.3.2. Rótulas plásticas P-M3

Esta sección presenta la metodología para la creación y asignación de rótulas P-M3 en el elemento modelado. El caso del elemento viga-columna con rótulas a flexocompresión en los extremos considera la rótula de tipo *Interacting P-M3* con deformación controlada (ver Figura IV-5).

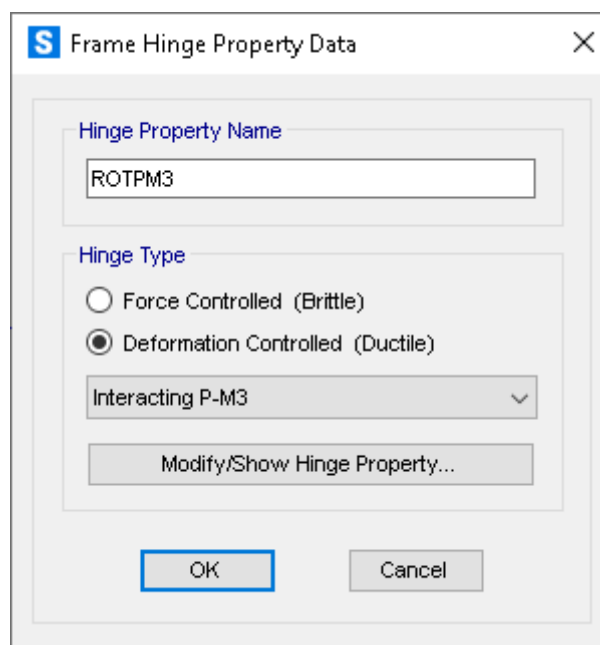


Figura IV-5. Definición de rótula P-M3 en SAP2000.

Menú *Define* → *Section Properties* → *Hinge Properties...* → *Add New Property...*
 Seleccionar *Use Defaults For: User Defined*
 Seleccionar *Hinge Type: Deformation Controlled (Ductile)* → *Interacting P-M3*

La Figura IV-6 muestra la ventana que fija consideraciones como el tipo de curva a graficar, la que al igual que en Figura III-7, es una de momento – rotación. Esta ventana también permite definir la condición de simetría de la curva y la cantidad discreta de cargas axiales a considerar para definir el momento plástico. En el caso de una rótula P-M3, el ángulo de la superficie de fluencia es inmodificable y el programa lo fija en 90°.

Figura IV-6. Especificaciones para rótula P-M3 en SAP2000.

Menú *Define* → *Section Properties* → *Hinge Properties...*
 → *Add New Property...* → *Modify/Show Hinge Property...*
 Seleccionar *Hinge Type: Deformation Controlled (Ductile)* → *Interacting P-M3*

La Figura IV-7 muestra la lista utilizada para ingresar las tres cargas axiales consideradas. En esta lista la compresión tiene signo negativo. Si en un análisis estructural el elemento se somete a cargas axiales que no estén en la lista, se interpreta que el programa realiza una interpolación. Sin embargo, el manual de SAP 2000 CSI (2017) no explica si usa o no un método de interpolación. Por lo anterior, es recomendable agregar varios valores de cargas axial para definir adecuadamente la curva de interacción de la sección.

Axial Forces for ROTPM3 - Interacting P-M3

Edit

This Number of Axial Force Values Is Specified

Number of Axial Forces: 3

Axial Force Data

	Axial Force	Tonf, cm, C
1	-288,	
2	-144,	
3	0,	

Order Rows

OK

Cancel

Figura IV-7. Lista de cargas axiales para rótula P-M3 en SAP2000.

Menú *Define* → *Section Properties* → *Hinge Properties...*
 → *Add New Property...* → *Modify/Show Hinge Property...*
 Seleccionar *Hinge Type: Deformation Controlled (Ductile)* → *Interacting P-M3*
 → *Modify/Show Axial Force Values...*

La Figura IV-8 muestra la ventana del programa para seleccionar el origen de los datos del diagrama de interacción. El diagrama de interacción se puede definir directamente usando el material del elemento (cálculo interno de SAP2000), a través de alguna normativa conocida, o bien con el ingreso manual de los puntos del diagrama. Adicionalmente, en la misma ventana se especifica la opción de relación de carga axial – desplazamiento axial. De acuerdo con el manual de SAP2000 (CSi, 2017), la opción “*Proportional to Moment – Rotation*” genera un comportamiento axial del mismo tipo que el dado para la flexión. A su vez, la opción “*Elastic – Perfectly Plastic*” define un comportamiento axial independiente de la flexión y solamente basado en los valores extremos de carga axial del diagrama de

interacción. En el caso de este trabajo se utiliza la opción “*Elastic – Perfectly Plastic*”, para materializar el desacoplamiento entre la carga axial y la flexión.

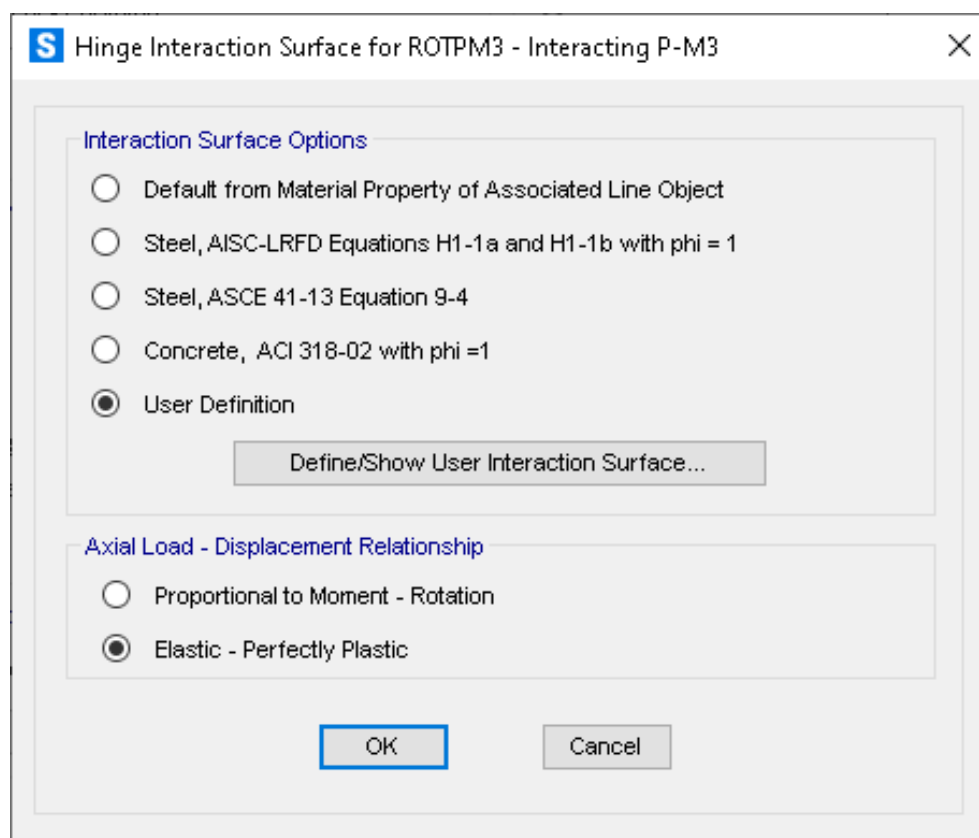


Figura IV-8. Opciones de diagrama de interacción para rótula P-M3.

Menú *Define* → *Section Properties* → *Hinge Properties...*
 → *Add New Property...* → *Modify/Show Hinge Property...*
 Seleccionar *Hinge Type: Deformation Controlled (Ductile)* → *Interacting P-M3*
 → *Modify/Show P-M3 Interaction Surface Data...*

La Figura IV-9 contiene la tabla de ingreso manual de los puntos del diagrama de interacción P-M3 para la rótula P-M3. El usuario debe indicar condición de simetría del diagrama, la cantidad de puntos, los factores de escala de los ejes coordenados, los valores de carga axial P para los cuales el momento M es nulo y los puntos intermedios del diagrama. En este caso, la curva es simétrica para momentos positivos y negativos. Los detalles de la obtención del diagrama se muestran en el Anexo A.

P-M3 Interaction Curve Definition for ROTPM3

Edit

User Interaction Curve Options

☒ Interaction Curve Is Symmetric

Number of Curves: 1

Number of Points on Each Curve: 12

Scale Factors (Same for All Curves)

Tonf, cm, C: P: 1, M3: 1,

First and Last Points (Same for All Curves)

Point	P	M3
1	-1227,	0
12	329,95	0

Interaction Curve Requirements - With Symmetry

- Only one P-M3 curve is specified.
- P (tension positive) increases monotonically.
- M3 = 0 at the first and last points.
- All M3 > 0 (except at first and last points).
- The curve must be convex (no dimples in surface).

Interaction Curve Data

Current Curve: 1

Point	P	M3
1	-1227,	0,
2	-1226,99	7500,13
3	-1139,	11689,
4	-975,45	14918,
5	-796,36	17355,
6	-589,08	19163,
7	-424,76	18768,
8	-258,93	16995,
9	-98,09	13968,
10	0,	11224,26
11	77,34	9061,04

Plot of Full Interaction Curve

☒ Highlight Current Curve

P: M3:

OK Cancel

Figura IV-9. Ingreso manual de diagrama de interacción P-M3.

Menú *Define* → *Section Properties* → *Hinge Properties...*
 → *Add New Property...* → *Modify/Show Hinge Property...*
 Seleccionar *Hinge Type: Deformation Controlled (Ductile)* → *Interacting P-M3*
 Seleccionar *Interaction Surface Options* → *User Definition*
 → *Modify/Show P-M3 Interaction Surface Data...*
 → *Define/Show User Interaction Surface...*

Las rótulas P-M3 son asignadas de la misma forma que en la Figura III-8, es decir, a los extremos del elemento viga-columna indicando las distancias relativas a éstos, normalizadas por la longitud del elemento (ver Figura IV-10). La rótula del apoyo izquierdo está en una distancia relativa igual a 0 y la rótula del apoyo derecho en una distancia igual a 1.

S Assign Frame Hinges ×

Frame Hinge Assignment Data

Hinge Property	Location Type	Relative Distance	Absolute Distance cm
ROTPM3	Relative To Clear Length	1	
ROTPM3	Relative To Clear Length	0	
ROTPM3	Relative To Clear Length	1	

Current Hinge Information
 Type: User Defined
 DOF: Interacting P-M3

Options

☐ Add Specified Hinge Assigns to Existing Hinge Assigns
☒ Replace Existing Hinge Assigns with Specified Hinge Assigns

Existing Hinge Assignments on Currently Selected Frame Objects
 Number of Selected Frame Objects: 1
 Total Number of Hinges on All Selected Frame Objects: 2
 All 2 existing hinge assignments will be removed when the above hinge assignment is applied

Figura IV-10. Asignación de rótulas P-M3 a la viga-columna.

Menú Assign → Frame → Hinges...

Indicar *Relative Distance* = 0 (apoyo izquierdo) → Add Hinge...

Indicar *Relative Distance* = 1 (apoyo derecho) → Add Hinge...

IV.3.3. Caso de flexión pura

En el caso de flexión pura en las rótulas P-M3, la Figura IV-11 muestra la aplicación de los momentos indicados en la Tabla IV-6 del análisis realizado en Excel, sin aplicar ninguna carga axial.

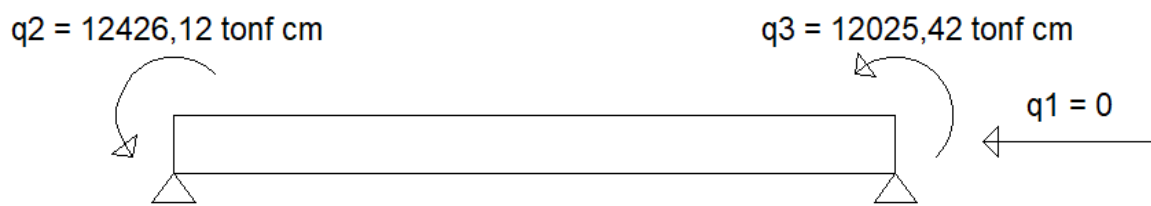


Figura IV-11. Cargas, *Load Pattern* “MOMENT” y “AXIAL” $P=0$.

La ventana de SAP2000 de la Figura IV-12 presenta la relación momento – rotación de la rótula plástica en valores adimensionales normalizados por el momento plástico y una rotación de fluencia dada arbitrariamente, al igual que en la sección III.3.2. Los puntos de la curva momento – rotación de la rótula P-M3 en el caso de flexión pura (ver Tabla IV-13) son los mismos que los calculados para el caso de las rótulas M3.

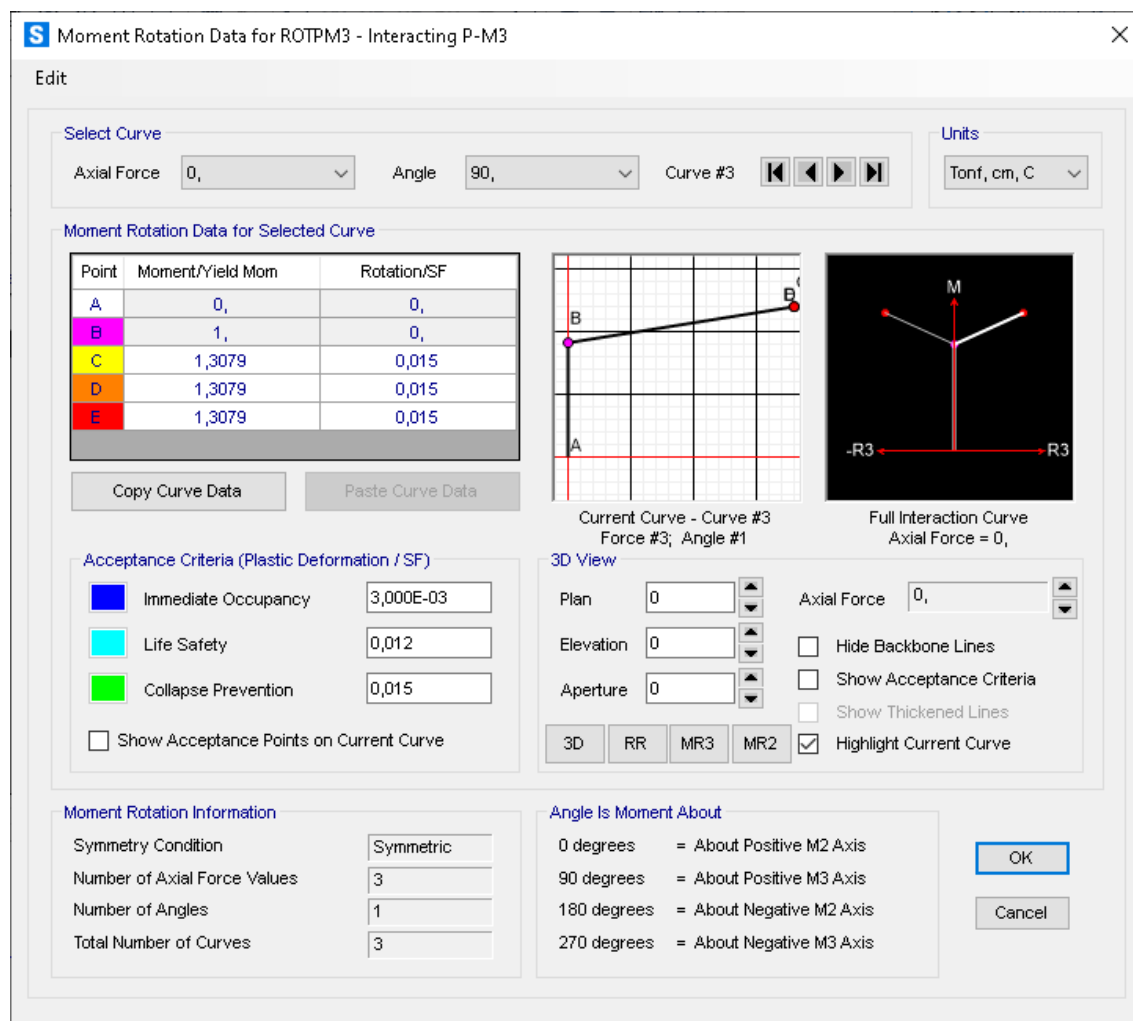


Figura IV-12. Momento – Rotación de rótula P-M3 en SAP2000, P=0.

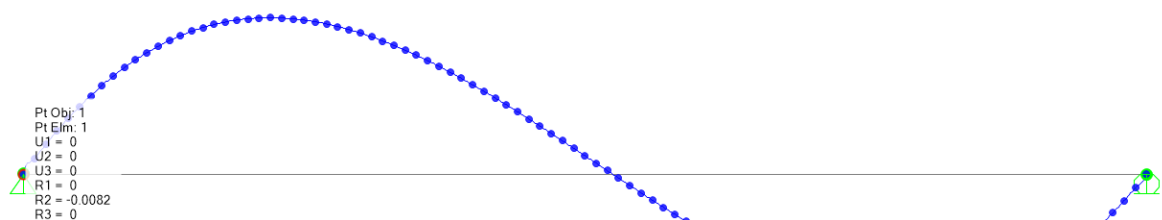
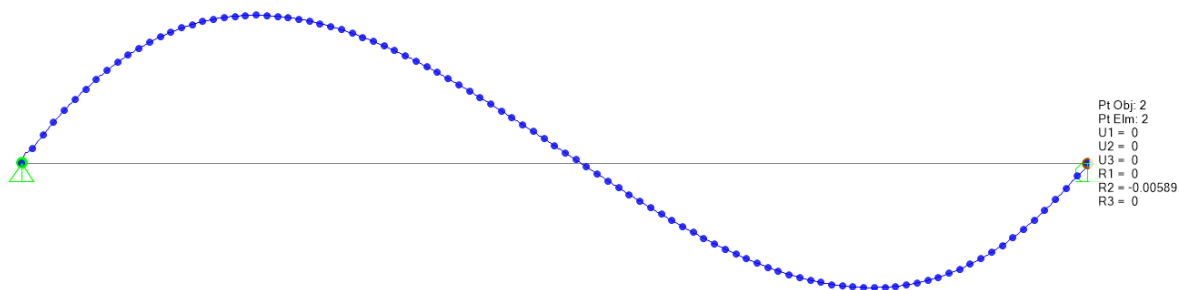
Menú *Define* → *Section Properties* → *Hinge Properties...*
 → *Add New Property...* → *Modify/Show Hinge Property...*
 Seleccionar *Hinge Type: Deformation Controlled (Ductile)* → *Interacting P-M3*
 → *Modify/Show Moment Rotation Curve Data...*

La Figura IV-12 muestra que los puntos C, D y E se fijan en el mismo valor (opcionalmente, los puntos D y E podrían fijarse en niveles mayores de deformación) y además según Figura IV-6, está seleccionada la opción de extrapolar después del punto E para garantizar que los niveles de rotaciones plásticas alcanzados en el análisis siempre estén dentro de la pendiente de rigidez con endurecimiento.

Tabla IV-13. Cálculo de punto C de curva momento – rotación, $P=0$.

Parámetros	Valores
Carga axial	$P = 0$
Momento plástico, punto B	$Moment_{SF} = M_p = 11224,26 \text{ tonf} \cdot \text{cm}$
Rotación, punto C	$\theta_C = 0,015 \text{ rad (default)}$
Momento, punto C	$Moment_C = M_p + k_{rot} \cdot \theta_C$ $= 11224,26 + 230400 \cdot 0,015 = 14680,26 \text{ tonf} \cdot \text{cm}$
Momento normalizado, punto C	$\frac{Moment_C}{SF} = \frac{14680,26}{11224,26} = 1,3079$

La Figura IV-13 muestra la deformada del elemento viga-columna sometida a los momentos calculados en Excel (ver Tabla IV-6) con los valores de las rotaciones totales en cada extremo de la viga.

(a) Rotación apoyo izquierdo $v_2 = 0,0082 \text{ rad}$ (b) Rotación apoyo derecho $v_3 = 0,00589 \text{ rad}$ (c) Desplazamiento apoyo derecho $v_1 = 0$ Figura IV-13. Deformada de viga, Load Case “P+M_NL”, $P=0$.

La Tabla IV-14 muestra las rotaciones plásticas obtenidas en las rótulas debido a la aplicación de los momentos en los extremos. La Tabla IV-15 presenta una comparación de los resultados de los análisis no lineales tanto de Excel como de SAP2000. En esta tabla, las deformaciones están mostradas en valor absoluto.

Tabla IV-14. Resultados en rótulas P-M3, *Load Case* “P+M_NL”, P=0.

TABLE: Frame Hinge States									
Frame	OutputCase	CaseType	AssignHinge	GenHinge	RelDist	AbsDist	P	M3	R3Plastic
Text	Text	Text	Text	Text	Unitless	cm	Tonf	Tonf-cm	Radians
1	P+M_NL	NonStatic	ROTPM3	1H1	0	0	0	-12426,12	-0,005413
1	P+M_NL	NonStatic	ROTPM3	1H2	1	1000	0	12025,42	0,003369

La Tabla IV-15 muestra una diferencia máxima de 2,5% entre la rotación total obtenida en SAP2000 y Excel. Con respecto a las rotaciones plásticas, las diferencias son menores al 4%. En lo referido a rotaciones elásticas, las rótulas presentan diferencias de resultados de aproximadamente un 0,1%.

Tabla IV-15. Comparación resultados análisis no lineal, P=0.

Parámetro	Valor en Excel	Valor en SAP2000	Diferencia % SAP2000/Excel
Desplazamiento, der.	0	0	0%
Rotación total, izq.	0.008000	0.008200	2.5%
Rotación total, der.	0.006000	0.005890	-1.8%
Rotación plástica, izq.	0.005216	0.005413	3.8%
Rotación plástica, der.	0.003477	0.003369	-3.1%
Rotación elástica, izq.	0.002784	0.002787	0.1%
Rotación elástica, der.	0.002523	0.002521	-0.1%

IV.3.4. Caso de flexocompresión a 10% de capacidad axial

En el caso de una carga axial de compresión equivalente al 10% de la capacidad de la sección, la Figura IV-14 muestra la aplicación de los momentos presentados en la Tabla IV-9 del análisis realizado en Excel con la carga axial correspondiente a $P = -144 \text{ tonf}$.

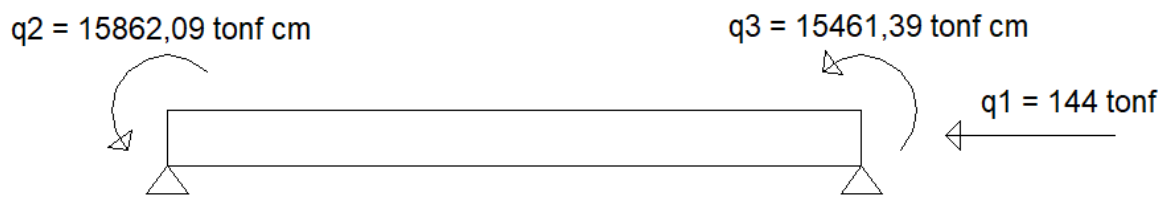


Figura IV-14. Cargas, *Load Pattern* “MOMENT” y “AXIAL” $P=10\% f_c A$.

La ventana de SAP2000 de la Figura IV-15 presenta la relación momento – rotación de la rótula plástica en valores adimensionales normalizados por el momento plástico y una rotación de fluencia dada arbitrariamente. La Tabla IV-16 muestra los puntos de la curva momento – rotación de la rótula P-M3 en el caso de compresión al 10% de capacidad. En este caso se considera el momento plástico de $M_p = 14832 \text{ tonf cm}$ asociado al nivel de carga axial de $10\% f_c A$.

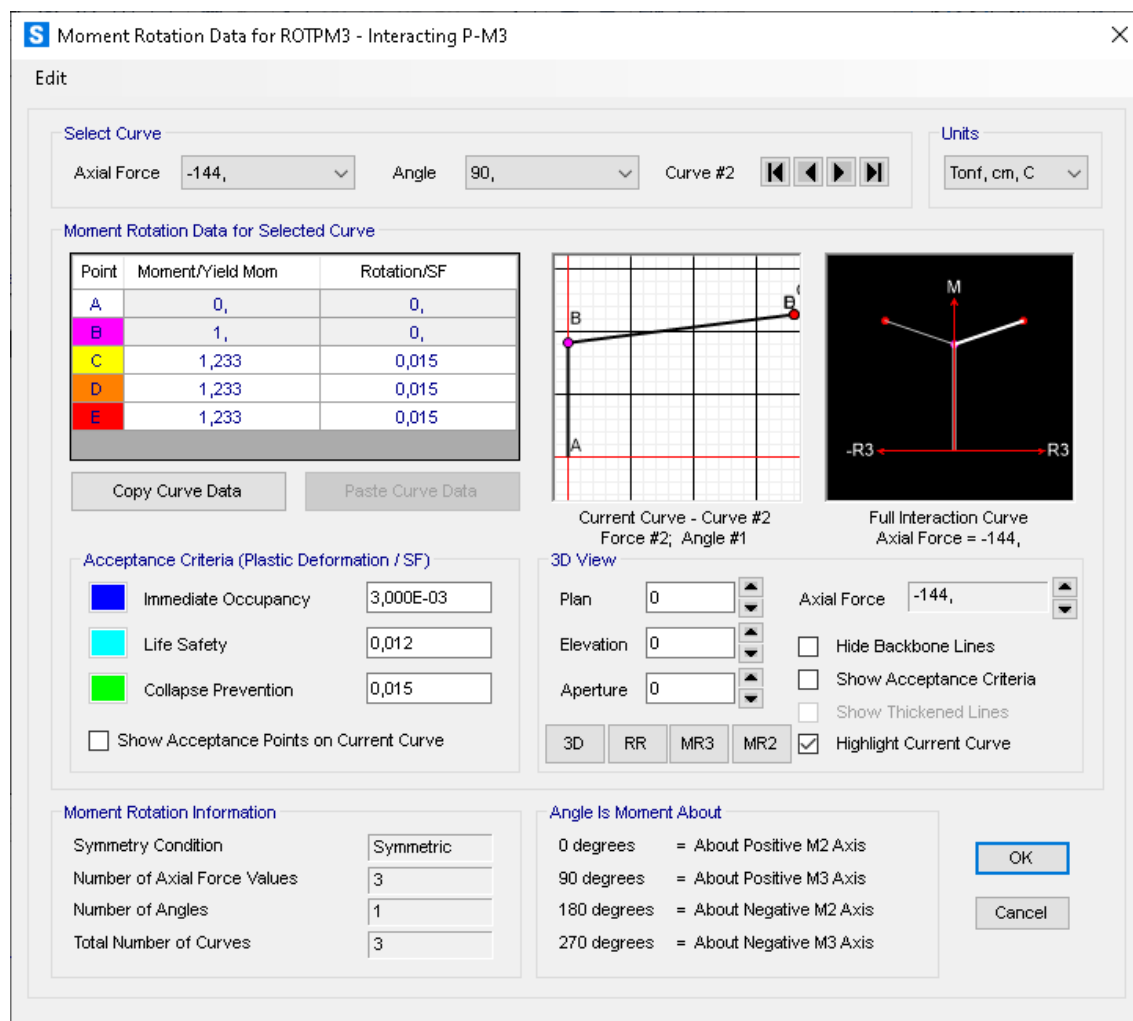


Figura IV-15. Curva Momento Rotación de rótula P-M3 en SAP2000, $P=10\% f_c A$.

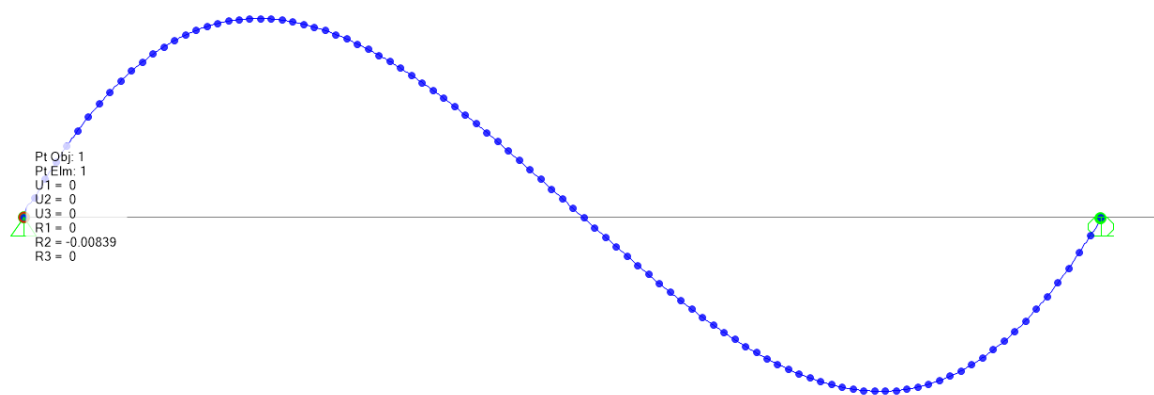
Menú *Define* → *Section Properties* → *Hinge Properties...*
→ *Add New Property...* → *Modify/Show Hinge Property...*
Seleccionar *Hinge Type: Deformation Controlled (Ductile)* → *Interacting P-M3*
→ *Modify/Show Moment Rotation Curve Data...*

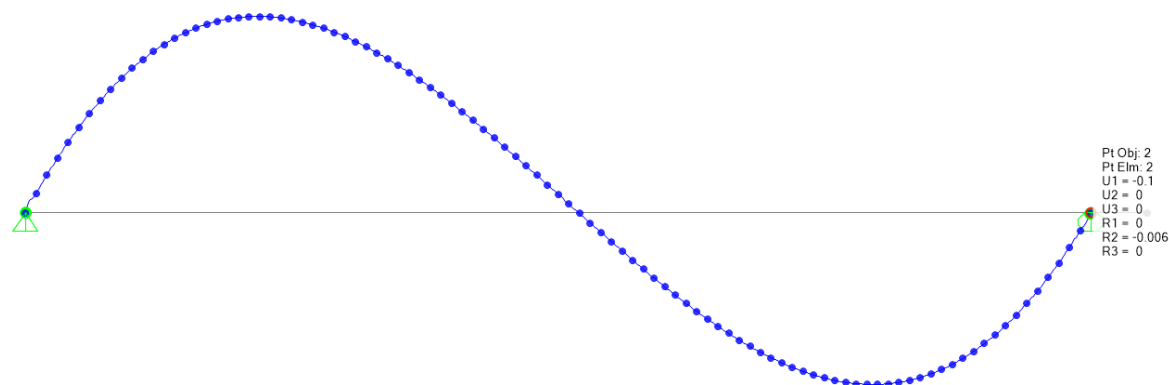
La Figura IV-15 muestra que los puntos C, D y E se fijan en el mismo valor (opcionalmente, los puntos D y E podrían fijarse en niveles mayores de deformación) y además según Figura IV-6, está seleccionada la opción de extrapolar después del punto E para garantizar que los niveles de rotaciones plásticas alcanzados en el análisis siempre estén dentro de la pendiente de rigidez con endurecimiento.

Tabla IV-16. Cálculo de punto C de curva momento – rotación, $P=10\% f_c A$.

Parámetros	Valores
Carga axial	$P = -144 \text{ tonf}$
Momento plástico, punto B	$Moment_{SF} = M_p = 14832,03 \text{ tonf} \cdot \text{cm}$
Rotación, punto C	$\theta_c = 0,015 \text{ rad (default)}$
Momento, punto C	$Moment_c = M_p + k_{rot} \cdot \theta_c$ $= 14832,03 + 230400 \cdot 0,015 = 18288,03 \text{ tonf} \cdot \text{cm}$
Momento normalizado, punto C	$\frac{Moment_c}{SF} = \frac{18288,03}{14832,03} = 1,233$

La Figura IV-16 muestra la deformada del elemento viga-columna sometida a los momentos calculados en Excel (ver Tabla IV-9) con los valores de las rotaciones totales en cada extremo de la viga.

(a) Rotación apoyo izquierdo $v_2 = 0,00839 \text{ rad}$



(b) Rotación apoyo derecho $v_3 = 0,006 \text{ rad}$

(c) Desplazamiento apoyo derecho $v_1 = -0,1 \text{ cm}$

Figura IV-16. Deformada de viga, *Load Case* “P+M_NL”, $P=10\% f_c A$.

La Tabla IV-17 muestra las rotaciones plásticas obtenidas en las rótulas debido a la aplicación de los momentos en los extremos. La rótula derecha no presenta rotación plástica. La Tabla IV-18 presenta una comparación de los resultados de los análisis no lineales tanto de Excel como de SAP2000. En esta tabla, las deformaciones están mostradas en valor absoluto.

Tabla IV-17. Resultados en rótulas P-M3, *Load Case* “P+M_NL”, $P=10\% f_c A$.

TABLE: Frame Hinge States									
Frame	OutputCase	CaseType	AssignHinge	GenHinge	RelDist	AbsDist	P	M3	R3Plastic
Text	Text	Text	Text	Text	Unitless	cm	Tonf	Tonf-cm	Radians
1	P+M_NL	NonStatic	ROTPM3	1H1	0	0	-144	-15861,61	-0,004856
1	P+M_NL	NonStatic	ROTPM3	1H2	1	1000	-144	15640,61	0,002728

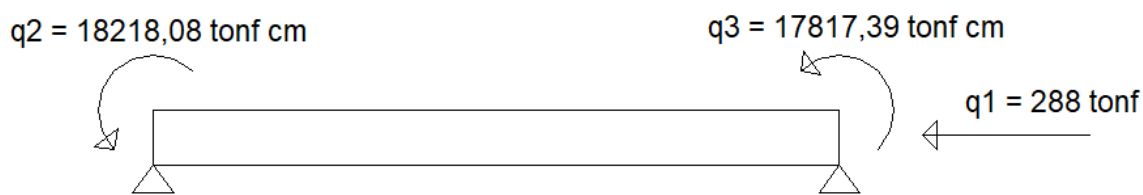
La Tabla IV-18 muestra una diferencia de 4,9% entre la rotación total obtenida en SAP2000 y Excel, mientras que no existe diferencia en la rótula derecha. Con respecto a las rotaciones plásticas, en particular, en la rótula izquierda se obtiene una diferencia de 8,6% entre los resultados, mientras que en la rótula derecha se obtiene una diferencia de 0,1%. En lo referido a rotaciones elásticas, las rótulas presentan diferencias de aproximadamente 0,1%.

Tabla IV-18. Comparación resultados análisis no lineal, $P=10\% f_c A$.

Parámetro	Valor en Excel	Valor en SAP2000	Diferencia % SAP2000/Excel
Desplazamiento, der.	-0.1 cm	-0.1 cm	0%
Rotación total, izq.	0.008000	0.008390	4.9%
Rotación total, der.	0.006000	0.006000	0%
Rotación plástica, izq.	0.004471	0.004856	8.6%
Rotación plástica, der.	0.002732	0.002728	-0.1%
Rotación elástica, izq.	0.003529	0.003534	0.1%
Rotación elástica, der.	0.003268	0.003272	0.1%

IV.3.5. Caso de flexocompresión a 20% de capacidad axial

En el caso de una carga axial de compresión equivalente al 20% de la capacidad de la sección, la Figura IV-17 muestra la aplicación de los momentos presentados en la Tabla IV-12 del análisis realizado en Excel con la carga axial correspondiente a $P = -288 \text{ tonf}$.

Figura IV-17. Cargas, *Load Pattern* “MOMENT” y “AXIAL” $P=20\% f_c A$.

La ventana de SAP2000 de la Figura IV-18 presenta la relación momento – rotación de la rótula plástica en valores adimensionales normalizados por el momento plástico y una rotación de fluencia dada arbitrariamente. La Tabla IV-19 muestra los puntos de la curva momento – rotación de la rótula P-M3 en el caso de compresión al 20% de capacidad. En este caso es considerado el momento plástico asociado a aquel nivel de carga axial.

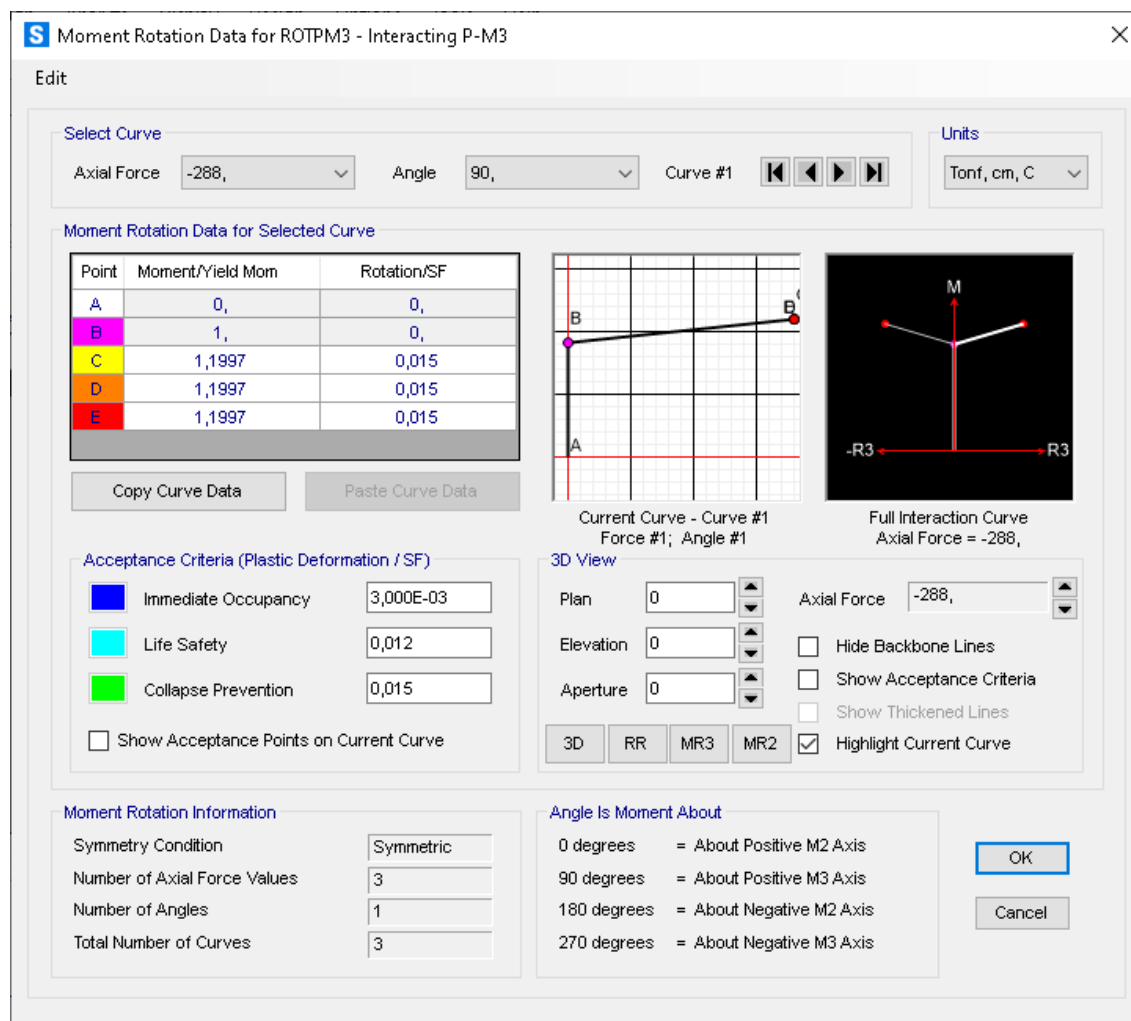


Figura IV-18. Curva Momento Rotación de rótula P-M3 en SAP2000, $P=20\% f_c A$.

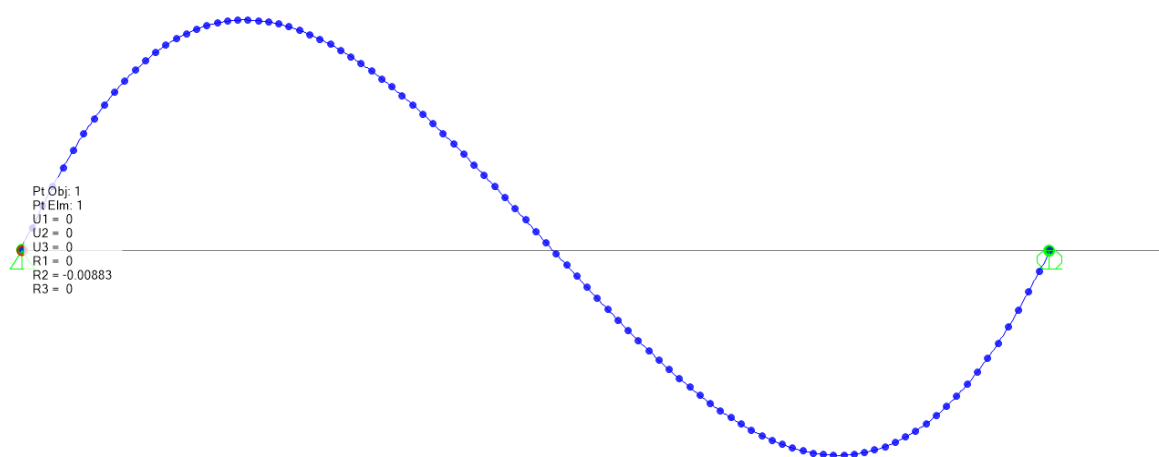
Menú *Define* → *Section Properties* → *Hinge Properties...*
→ *Add New Property...* → *Modify/Show Hinge Property...*
Seleccionar *Hinge Type: Deformation Controlled (Ductile)* → *Interacting P-M3*
→ *Modify/Show Moment Rotation Curve Data...*

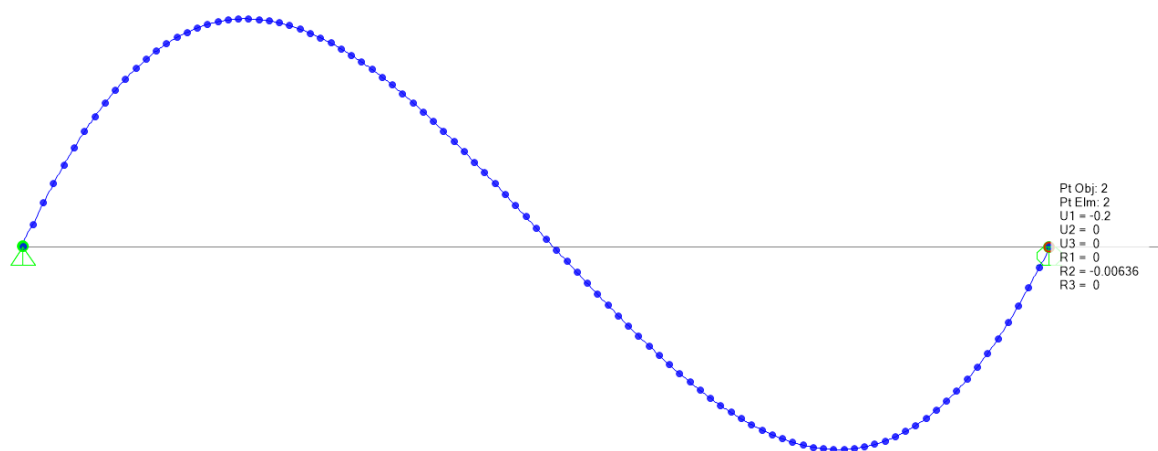
La Figura IV-18 muestra que los puntos C, D y E se fijan en el mismo valor (opcionalmente podrían fijarse en niveles mayores de deformaciones) y además según Figura IV-6, está seleccionada la opción de extrapolar después del punto E para garantizar que los niveles de rotaciones plásticas alcanzados en el análisis siempre estén dentro de la pendiente de rigidez con endurecimiento.

Tabla IV-19. Cálculo de punto C de curva momento – rotación, $P=20\% f_c A$.

Parámetros	Valores
Carga axial	$P = -288 \text{ tonf}$
Momento plástico, punto B	$Moment_{SF} = M_p = 17305,82 \text{ tonf} \cdot \text{cm}$
Rotación, punto C	$\theta_C = 0,015 \text{ rad (default)}$
Momento, punto C	$Moment_C = M_p + k_{rot} \cdot \theta_C$ $= 17305,82 + 230400 \cdot 0,015 = 20761,82 \text{ tonf} \cdot \text{cm}$
Momento normalizado, punto C	$\frac{Moment_C}{SF} = \frac{20761,82}{17305,82} = 1,1997$

La Figura IV-19 muestra la deformada del elemento viga-columna sometida a los momentos calculados en Excel (ver Tabla IV-12) con los valores de las rotaciones totales en cada extremo de la viga.

(a) Rotación apoyo izquierdo $v_2 = 0,00883 \text{ rad}$



(b) Rotación apoyo derecho $v_3 = 0,00636 \text{ rad}$

(c) Desplazamiento apoyo derecho $v_1 = -0,2 \text{ cm}$

Figura IV-19. Deformada de viga, *Load Case* “P+M_NL”, $P=20\% f'_c A$.

La Tabla IV-20 muestra las rotaciones plásticas obtenidas en las rótulas debido a la aplicación de los momentos en los extremos. La rótula derecha no presenta rotación plástica. La Tabla IV-21 presenta una comparación de los resultados de los análisis no lineales tanto de Excel como de SAP2000. En esta tabla, las deformaciones están mostradas en valor absoluto.

Tabla IV-20. Resultados en rótulas P-M3, *Load Case* “P+M_NL”, $P=20\% f'_c A$.

TABLE: Frame Hinge States									
Frame	OutputCase	CaseType	AssignHinge	GenHinge	RelDist	AbsDist	P	M3	R3Plastic
Text	Text	Text	Text	Text	Unitless	cm	Tonf	Tonf-cm	Radians
1	P+M_NL	NonStatic	ROTPM3	1H1	0	0	-288	-18217,28	-0,004793
1	P+M_NL	NonStatic	ROTPM3	1H2	1	1000	-288	17816,43	0,002581

La Tabla IV-21 muestra una diferencia de 10,4% entre la rotación total de la rótula izquierda obtenida en SAP2000 y Excel, mientras que la diferencia en la rótula derecha es de 6%. Con respecto a las rotaciones plásticas, en particular, en la rótula izquierda se obtiene una diferencia de 21% entre los resultados, mientras que en la rótula derecha se obtiene una diferencia de 16%. En lo referido a rotaciones elásticas, las rótulas presentan diferencias menores a 0,1%.

Tabla IV-21. Comparación resultados análisis no lineal, $P=20\% f'_c A$.

Parámetro	Valor en Excel	Valor en SAP2000	Diferencia % SAP2000/Excel
Desplazamiento, der.	-0,2 cm	-0,2 cm	0%
Rotación total, izq.	0.008000	0.008830	10.4%
Rotación total, der.	0.006000	0.006360	6%
Rotación plástica, izq.	0.003959	0.004793	21.1%
Rotación plástica, der.	0.002220	0.002581	16.3%
Rotación elástica, izq.	0.004041	0.004037	-0.1%
Rotación elástica, der.	0.003780	0.003779	-0.03%

V. CONCLUSIONES Y COMENTARIOS

En este trabajo se validó el análisis estático no lineal de elementos viga-columna con plasticidad concentrada en sus extremos del programa SAP2000 v23.2.0. Para hacer esta evaluación se construyó una planilla Excel para analizar elementos viga-columna con rótulas M3 o P-M3 en los extremos.

Los resultados obtenidos en SAP2000 para el análisis de elementos viga-columna con rótulas flexurales no muestran diferencias numéricas con respecto a los calculados por la planilla Excel. Por lo anterior, se valida el uso del programa SAP2000 para este tipo de rótulas. La planilla Excel funciona de manera correcta para rótulas flexurales con comportamiento bilineal para la flexión. Para momentos menores al momento plástico, el elemento se comporta de manera lineal elástica y para momentos mayores, las rótulas tienen un endurecimiento que genera un aumento del momento a medida que aumenta la rotación plástica.

Para el análisis de elementos viga-columna con rótulas a flexocompresión de SAP2000, se observó diferencias numéricas despreciables en el cálculo de las componentes elásticas de las rotaciones con respecto a los resultados de Excel. Sin embargo, en el cálculo de las componentes plásticas se obtuvo diferencias mayores: (a) para el caso de carga axial nula, la diferencia fue de 4%; (b) para el caso de carga axial del 10% de la capacidad axial de la sección, la diferencia llegó al 9%; y (c) para el caso de carga axial equivalente al 20% de la capacidad, la diferencia fue 21%. Las diferencias numéricas en las rotaciones plásticas generaron diferencias en el cálculo de rotaciones totales de: (a) 3%, (b) 5%; y (c) 10%, respectivamente. Se observa que la diferencia máxima calculada entre los análisis realizados en Excel y SAP2000 aumenta junto con la carga axial. Para determinar si esta tendencia era efectiva, se realizaron pruebas con mayores niveles de compresión (no exhibidas en este trabajo) y se detectó que el error numérico de la rotación total disminuyó al 3% y el de la componente plástica al 8% para una carga axial de aproximadamente un 40% de la capacidad

axial de la sección. Se recomienda explorar en una investigación futura el origen y la explicación de estas diferencias.

Para investigaciones futuras, se sugiere desarrollar una planilla Excel que considere rigideces tangentes negativas o caídas de cargas como en las curvas de FEMA (2000) y de esta forma validarlas para SAP2000.

Respecto de las opciones de SAP2000 para la relación carga axial – desplazamiento axial, no se encontró detalle del cálculo interno al elegir una u otra opción en las rótulas a flexocompresión. Adicionalmente, el manual de SAP2000 (CSI, 2017) no profundiza en ninguna de las dos opciones: (1) “*Proportional to Moment – Rotation*” ni (2) “*Elastic – Perfectly Plastic*”. En este trabajo se decidió usar la opción (2) ya que los resultados de desplazamiento axial concordaron con el comportamiento esperado para un elemento sometido a compresión elástica.

Finalmente se realizaron pruebas en SAP2000 con la opción (1) (no exhibidas en este trabajo), en las que, a pesar de no haber manera de definir algún comportamiento plástico para el esfuerzo axial, se obtienen desplazamientos axiales plásticos de alargamiento que pueden llegar a superar al acortamiento elástico. El alargamiento plástico observado es incoherente con el comportamiento estructural esperado de aplicar una carga de compresión y por lo tanto fue descartado el uso de esta opción en las especificaciones de rótulas P-M3. Se recomienda investigar en el futuro respecto a qué hace SAP2000 cuando considera una u otra opción de relación carga axial – desplazamiento axial a diferentes niveles de fuerzas de compresión o tracción.

VI. BIBLIOGRAFIA

- BOZORGNIA, Y. y BERTERO, V. (2004), *Earthquake Engineering, From Engineering Seismology to Performance – Based Engineering*, CRC Press, London.
- COMPUTERS AND STRUCTURES INC. (2017), *SAP2000 v23 SAPFIRE, Structural Analysis and Design, CSI Analysis Reference Manual*, California, USA.
- COMPUTERS AND STRUCTURES INC. (2021), *SAP2000 Ultimate 64-bit Version 23.2.0 Build 1738, Structural Analysis Program*, California USA.
- FEMA (2000), *Prestandard and Commentary for Seismic Rehabilitation of Buildings, Prepared by the American Society of Civil Engineers for the Federal Emergency Management Agency (Report No. FEMA 356)*, Washington D.C., USA.
- HUBE, M. (2022a), *Tarea 4, Curso “Hormigón Armado Avanzado”, ICE 3413*. Mayo, 2022. Departamento de Ingeniería Estructural y Geotécnica, Pontificia Universidad Católica de Chile, Santiago, Chile.
- HUBE, M. (2022b), *Capítulo 6: “Elementos Tipo Viga-Columna”, Curso “Análisis Estructural No Lineal”, IEG 3120*. Octubre – Noviembre 2022. Departamento de Ingeniería Estructural y Geotécnica, Pontificia Universidad Católica de Chile, Santiago, Chile.

ANEXOS

VII. ANEXO A

VII.1. Sección transversal del elemento viga-columna

Esta parte muestra la geometría y armadura de la sección transversal considerada en esta actividad de graduación (ver Figura VII-1). La sección tiene un área bruta de 60 por 80 centímetros, está armada longitudinalmente por 16 barras de diámetro 25 mm y transversalmente por tres estribos de diámetro 12 mm separados cada 12 cm. La Figura VII-2 muestra la sección transversal creada en la herramienta *Section Designer* del programa SAP2000 con su armadura longitudinal.

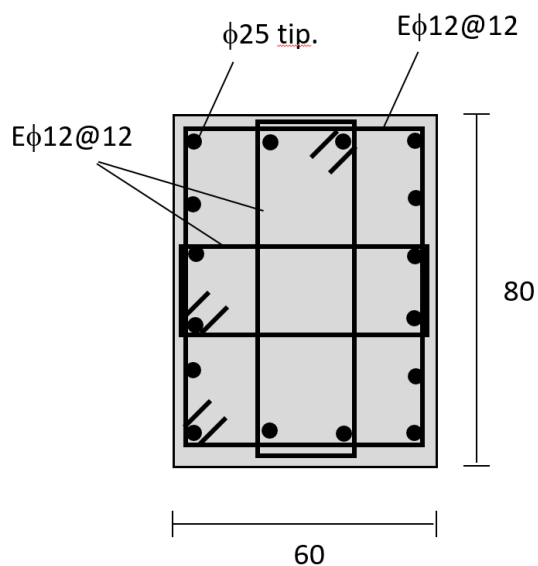


Figura VII-1. Sección transversal del elemento (Hube, 2022a)

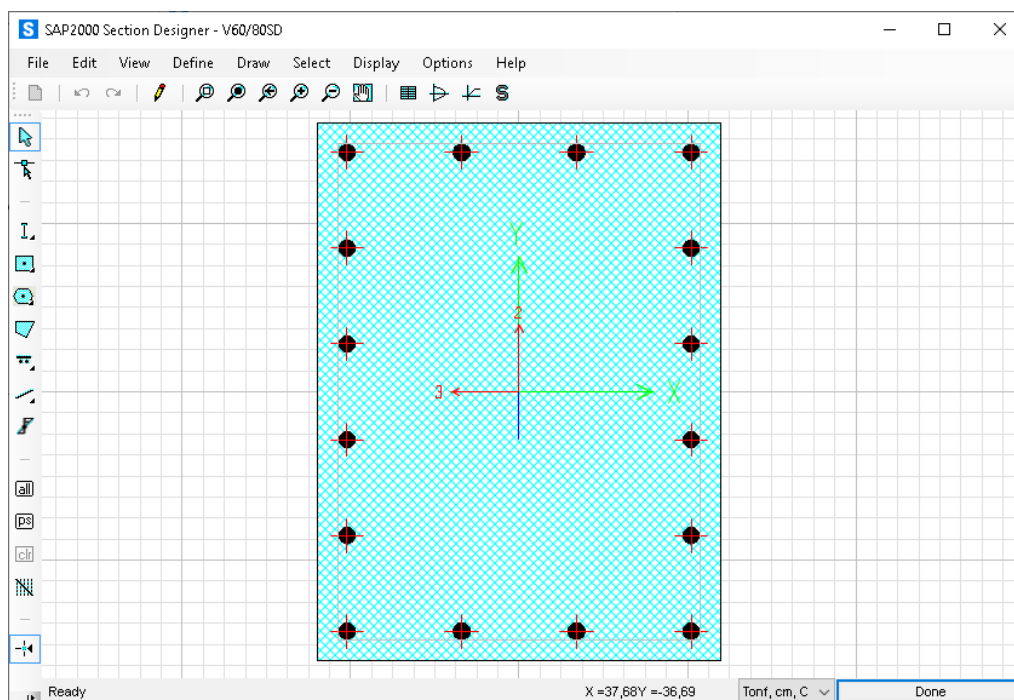


Figura VII-2. Sección transversal en *Section Designer* de SAP2000.

VII.2. Diagrama de interacción P-M3 de la sección

A partir de la sección transversal definida en Figura VII-1, SAP2000 permite obtener el diagrama de interacción P-M3 según el código ACI 318-19 (ver Figura VII-3). Para esta tesis, el diagrama empleado es P-M3, el cual ha sido considerado sin factor de reducción ϕ en sus opciones de diseño.

La Tabla VII-1 muestra los puntos del diagrama de interacción P-M3, para valores positivos de momento. El punto N°10 corresponde al valor que toma el momento cuando la carga axial es nula, obtenido con una interpolación lineal entre los puntos N°9 y N°11. Este valor es utilizado en el capítulo III como el momento plástico de las rótulas M3. En la columna de carga axial nominal del punto N°2, ha sido ingresado el valor -1226,99 en lugar de -1227 debido a que SAP2000 no permite ingresar un valor de carga axial repetido.

El diagrama de interacción P-M3 se emplea en el capítulo IV, con la finalidad de obtener el momento plástico de la rótula P-M3, para un nivel de carga axial dado, usando tanto Excel como SAP2000, a través de interpolación lineal.

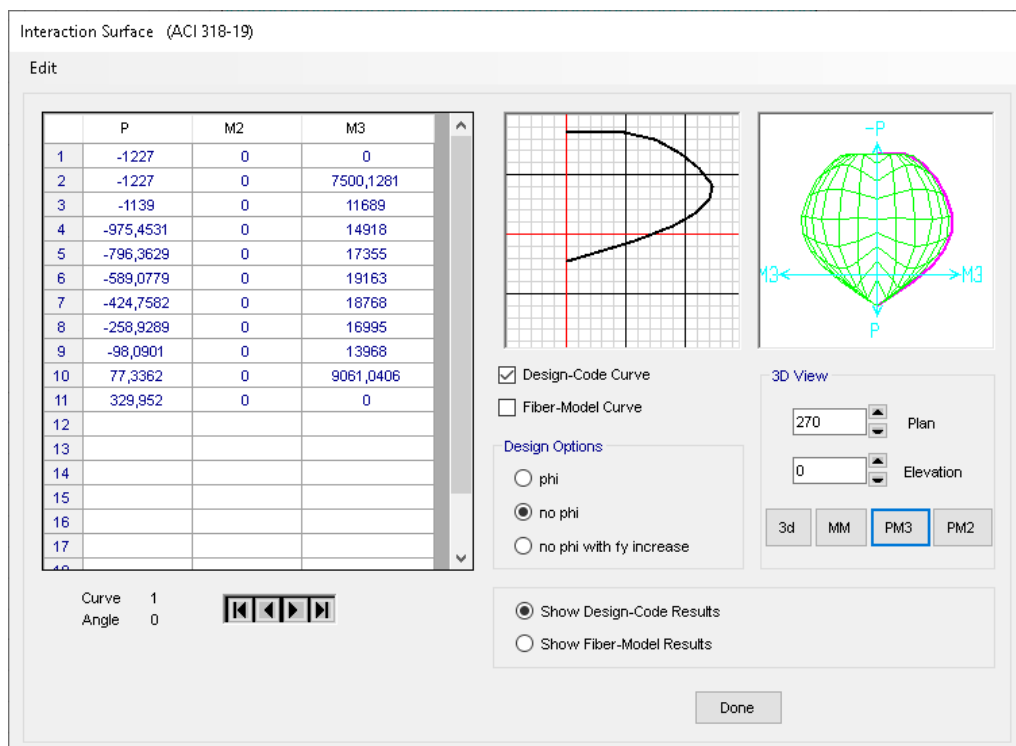


Figura VII-3. Puntos del diagrama de interacción P-M3, SAP2000.

La Figura VII-4 presenta el diagrama de interacción P-M obtenido a partir de los puntos de la Tabla VII-1. El gráfico muestra una curva simétrica, considerando los momentos como valores positivos y negativos.

Tabla VII-1. Datos del diagrama de interacción P-M3.

Punto N°	Carga axial nominal Pn [tonf]	Momento nominal Mn [tonf cm]
1	-1227	0
2	-1226,99	7500,13
3	-1139	11689
4	-975,45	14918
5	-796,36	17355
6	-589,08	19163
7	-424,76	18768
8	-258,93	16995
9	-98,09	13968
10	0	11224,26
11	77,34	9061,04
12	329,95	0

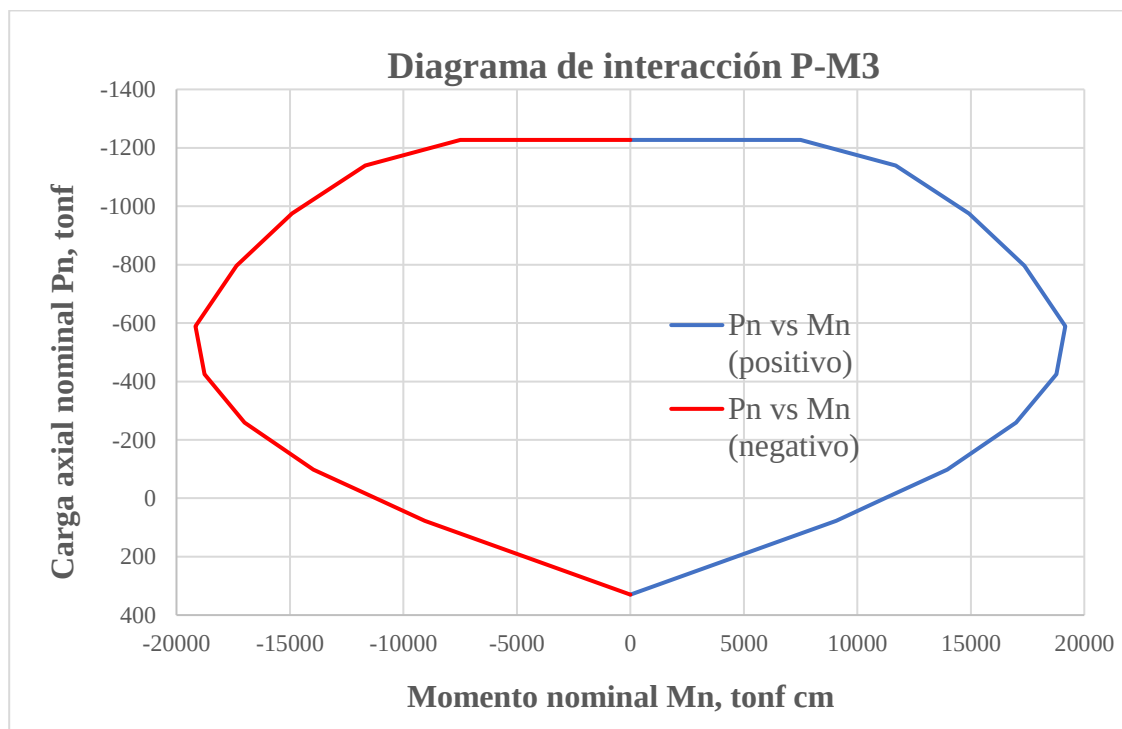


Figura VII-4. Diagrama de interacción P-M3.

VIII. ANEXO B

VIII.1. Proceso iterativo, viga con rótulas M3

Tabla VIII-1. Resultados iteración n=0.

Iteración n = 0			
q0 =	10000	tonf cm	
	10000		
ve(q0) =	0.002170139	rad	
	0.002170139		
q0 - Qp =	-1224.260103	tonf cm	
	-1224.260103		
mr2 =	0		
mr3 =	0		
fp(q0) =	0	0	1/tonf/cm
	0	0	
vp(q0) =	0	rad	
	0		
v(q0) =	0.002170139	rad	
	0.002170139		
Δv0 =	0.005829861	rad	
	0.003829861		
error =	0.96875753	> 0.001 - seguir	
f(q0) =	4.34028E-07	-2.17014E-07	1/tonf/cm
	-2.17014E-07	4.34028E-07	
k(q0) =	3072000	1536000	tonf cm
	1536000	3072000	
Δq0 =	23792	tonf cm	
	20720		

Tabla VIII-2. Resultados iteración n=1.

Iteración n = 1			
q1 =	33792	tonf cm	
	30720		
ve(q1) =	0.008	rad	
	0.006		
q1 - Qp =	22567.7399	tonf cm	
	19495.7399		
mr2 =	1		
mr3 =	1		
fp(q1) =	4.34028E-06	0	1/tonf/cm
	0	4.34028E-06	
vp(q1) =	0.09795026	rad	
	0.084616927		
v(q1) =	0.10595026	rad	
	0.090616927		
Δv1 =	-0.09795026	rad	
	-0.084616927		
error =	18.67618197	> 0.001 - seguir	
f(q1) =	4.77431E-06	-2.17014E-07	1/tonf/cm
	-2.17014E-07	4.77431E-06	
k(q1) =	209888.1988	9540.372671	tonf cm
	9540.372671	209888.1988	
Δq1 =	-21365.88065	tonf cm	
	-18694.5763		

Tabla VIII-3. Resultados iteración n=2.

Iteración n = 2			
q2 =	12426.11935	tonf cm	
	12025.4237		
ve(q2) =	0.002783597	rad	
	0.002522727		
q2 - Qp =	1201.85925	tonf cm	
	801.1635976		
mr2 =	1		
mr3 =	1		
fp(q2) =	4.34028E-06	0	1/tonf/cm
	0	4.34028E-06	
vp(q2) =	0.005216403	rad	
	0.003477273		
v(q2) =	0.008	rad	
	0.006		
Δv2 =	0	rad	
	2.08167E-17		
error =	3.46945E-15	< 0.001 - OK	
f(q2) =	4.77431E-06	-2.17014E-07	1/tonf/cm
	-2.17014E-07	4.77431E-06	
k(q2) =	209888.1988	9540.372671	tonf cm
	9540.372671	209888.1988	
Δq2 =	1.98599E-13	tonf cm	
	4.36918E-12		

VIII.2. Proceso iterativo, viga-columna con rótulas P-M3, P=0

Tabla VIII-4. Resultados iteración n=0, P=0.

Iteración n =	0		
q0 =	-1000	tonf	
	10000		
	10000	tonf cm	
ve(q0) =	-0.6944444444	cm	
	0.002170139		
	0.002170139	rad	
Mp(q0_1) =	14433.35651	tonf cm	
q0 - Qp =	0	tonf	
	-4433.356512		
	-4433.356512	tonf cm	
mr2 =	0		
mr3 =	0		
fp(q0) =	0	0	0
	0	0	0
	0	0	0
vp(q0) =	0	cm	
	0		
	0	rad	
v(q0) =	-0.6944444444	cm	
	0.002170139		
	0.002170139	rad	
Δv0 =	0.6944444444	cm	
	0.005829861		
	0.003829861	rad	
error =	0.96875753	> 0.001 - seguir	
f(q0) =	0.000694444	0	0
	0	4.34028E-07	-2.17014E-07
	0	-2.17014E-07	4.34028E-07
k(q0) =	1440	0	0
	0	3072000	1536000
	0	1536000	3072000
Δq0 =	1000	tonf	
	23792		
	20720	tonf cm	

Tabla VIII-5. Resultados iteración n=1, P=0.

Iteración n =	1		
q1 =	0	tonf	
	33792		
	30720	tonf cm	
ve(q1) =	0	cm	
	0.008		
	0.006	rad	
Mp(q1_1) =	11224.2601	tonf cm	
q1 - Qp =	0	tonf	
	22567.7399		
	19495.7399	tonf cm	
mr2 =	1		
mr3 =	1		
fp(q1) =	0	0	0
	0	4.34028E-06	0
	0	0	4.34028E-06
vp(q1) =	0	cm	
	0.09795026		
	0.084616927	rad	
v(q1) =	-9.9997E-13	cm	
	0.10595026		
	0.090616927	rad	
Δv1 =	-2.95232E-17	cm	
	-0.09795026		
	-0.084616927	rad	
error =	18.67618197	> 0.001 - seguir	
f(q1) =	0.000694444	0	0
	0	4.77431E-06	-2.17014E-07
	0	-2.17014E-07	4.77431E-06
k(q1) =	1440	0	0
	0	209888.1988	9540.372671
	0	9540.372671	209888.1988
Δq1 =	-4.25134E-14	tonf	
	-21365.88065		
	-18694.5763	tonf cm	

Tabla VIII-6. Resultados iteración n=2, P=0.

Iteración n =	2		
q2 =	-1.44E-09	tonf	
	12426.11935	tonf cm	
	12025.4237		
ve(q2) =	-1E-12	cm	
	0.002783597	rad	
	0.002522727		
Mp(q2_1) =	11224.2601	tonf cm	
q2 - Qp =	0	tonf	
	1201.85925	tonf cm	
	801.1635976		
mr2 =	1		
mr3 =	1		
fp(q2) =	0	0	0
	0	4.34028E-06	0
	0	0	4.34028E-06
vp(q2) =	0	cm	
	0.005216403	rad	
	0.003477273		
v(q2) =	-1E-12	cm	
	0.008	rad	
	0.006		
Δv2 =	0	cm	
	6.93889E-18	rad	
	2.08167E-17		
error =	3.57622E-15	< 0.001 - OK	
f(q2) =	0.000694444	0	0
	0	4.77431E-06	-2.17014E-07
	0	-2.17014E-07	4.77431E-06
k(q2) =	1440	0	0
	0	209888.1988	9540.372671
	0	9540.372671	209888.1988
Δq2 =	0	tonf	
	1.65499E-12	tonf cm	
	4.43538E-12		

VIII.3. Proceso iterativo, viga-columna con rótulas P-M3, $P=10\% f'_c A$

Tabla VIII-7. Resultados iteración, $n=0$, $P=10\% f'_c A$.

Iteración n =	0		
q0 =	-1000	tonf	
	10000		
	10000	tonf cm	
ve(q0) =	-0.6944444444	cm	
	0.002170139		
	0.002170139	rad	
Mp(q0_1) =	14433.35651	tonf cm	
q0 - Qp =	0	tonf	
	-4433.356512		
	-4433.356512	tonf cm	
mr2 =	0		
mr3 =	0		
fp(q0) =	0	0	0
	0	0	0
	0	0	0
vp(q0) =	0	cm	
	0		
	0	rad	
v(q0) =	-0.6944444444	cm	
	0.002170139		
	0.002170139	rad	
$\Delta v0$ =	0.5944444444	cm	
	0.005829861		
	0.003829861	rad	
error =	6.022865672	> 0.001 - seguir	
f(q0) =	0.000694444	0	0
	0	4.34028E-07	-2.17014E-07
	0	-2.17014E-07	4.34028E-07
k(q0) =	1440	0	0
	0	3072000	1536000
	0	1536000	3072000
$\Delta q0$ =	856	tonf	
	23792		
	20720	tonf cm	

Tabla VIII-8. Resultados iteración n=1, P=10% $f_c A$.

Iteración n =	1		
q1 =	-144	tonf	
	33792		
	30720	tonf cm	
ve(q1) =	-0.1	cm	
	0.008		
	0.006	rad	
Mp(q1_1) =	14832.02825	tonf cm	
q1 - Qp =	0	tonf	
	18959.97175		
	15887.97175	tonf cm	
mr2 =	1		
mr3 =	1		
fp(q1) =	0	0	0
	0	4.34028E-06	0
	0	0	4.34028E-06
vp(q1) =	0	cm	
	0.082291544		
	0.068958211	rad	
v(q1) =	-0.1	cm	
	0.090291544		
	0.074958211	rad	
$\Delta v1$ =	0	cm	
	-0.082291544		
	-0.068958211	rad	
error =	15.42403209	> 0.001 - seguir	
f(q1) =	0.000694444	0	0
	0	4.77431E-06	-2.17014E-07
	0	-2.17014E-07	4.77431E-06
k(q1) =	1440	0	0
	0	209888.1988	9540.372671
	0	9540.372671	209888.1988
$\Delta q1$ =	0	tonf	
	-17929.91098		
	-15258.60663	tonf cm	

Tabla VIII-9. Resultados iteración n=2, P=10% $f_c A$.

Iteración n =	2		
q2 =	-144	tonf	
	15862.08902	tonf cm	
	15461.39337		
ve(q2) =	-0.1	cm	
	0.00352925	rad	
	0.003268381		
Mp(q2_1) =	14832.02825	tonf cm	
q2 - Qp =	0	tonf	
	1030.060766	tonf cm	
	629.3651143		
mr2 =	1		
mr3 =	1		
fp(q2) =	0	0	0
	0	4.34028E-06	0
	0	0	4.34028E-06
vp(q2) =	0	cm	
	0.00447075	rad	
	0.002731619		
v(q2) =	-0.1	cm	
	0.008	rad	
	0.006		
$\Delta v2$ =	0	cm	
	-1.38778E-17	rad	
	9.54098E-18		
error =	2.35327E-15	< 0.001 - OK	
f(q2) =	0.000694444	0	0
	0	4.77431E-06	-2.17014E-07
	0	-2.17014E-07	4.77431E-06
k(q2) =	1440	0	0
	0	209888.1988	9540.372671
	0	9540.372671	209888.1988
$\Delta q2$ =	0	tonf	
	-2.82176E-12	tonf cm	
	1.87014E-12		

VIII.4. Proceso iterativo, viga-columna con rótulas P-M3, $P=20\% f'_c A$

Tabla VIII-10. Resultados iteración $n=0$, $P=20\% f'_c A$.

Iteración n =	0		
q0 =	-1000	tonf	
	10000		
	10000	tonf cm	
ve(q0) =	-0.6944444444	cm	
	0.002170139		
	0.002170139	rad	
Mp(q0_1) =	14433.35651	tonf cm	
q0 - Qp =	0	tonf	
	-4433.356512		
	-4433.356512	tonf cm	
mr2 =	0		
mr3 =	0		
fp(q0) =	0	0	0
	0	0	0
	0	0	0
vp(q0) =	0	cm	
	0		
	0	rad	
v(q0) =	-0.6944444444	cm	
	0.002170139		
	0.002170139	rad	
$\Delta v0$ =	0.4944444444	cm	
	0.005829861		
	0.003829861	rad	
error =	2.655254012	> 0.001 - seguir	
f(q0) =	0.000694444	0	0
	0	4.34028E-07	-2.17014E-07
	0	-2.17014E-07	4.34028E-07
k(q0) =	1440	0	0
	0	3072000	1536000
	0	1536000	3072000
$\Delta q0$ =	712	tonf	
	23792		
	20720	tonf cm	

Tabla VIII-11. Resultados iteración n=1, P=20% $f_c A$.

Iteración n =	1		
q1 =	-288	tonf	
	33792		
	30720	tonf cm	
ve(q1) =	-0.2	cm	
	0.008		
	0.006	rad	
Mp(q1_1) =	17305.81998	tonf cm	
q1 - Qp =	0	tonf	
	16486.18002		
	13414.18002	tonf cm	
mr2 =	1		
mr3 =	1		
fp(q1) =	0	0	0
	0	4.34028E-06	0
	0	0	4.34028E-06
vp(q1) =	0	cm	
	0.071554601		
	0.058221267	rad	
v(q1) =	-0.2	cm	
	0.079554601		
	0.064221267	rad	
$\Delta v1$ =	0	cm	
	-0.071554601		
	-0.058221267	rad	
error =	13.19695907	> 0.001 - seguir	
f(q1) =	0.000694444	0	0
	0	4.77431E-06	-2.17014E-07
	0	-2.17014E-07	4.77431E-06
k(q1) =	1440	0	0
	0	209888.1988	9540.372671
	0	9540.372671	209888.1988
$\Delta q1$ =	0	tonf	
	-15573.91886		
	-12902.61451	tonf cm	

Tabla VIII-12. Resultados iteración n=2, P=20% $f_c A$.

Iteración n =	2		
q2 =	-288	tonf	
	18218.08114	tonf cm	
	17817.38549		
ve(q2) =	-0.2	cm	
	0.004040533	rad	
	0.003779664		
Mp(q2_1) =	17305.81998	tonf cm	
q2 - Qp =	0	tonf	
	912.2611602	tonf cm	
	511.565508		
mr2 =	1		
mr3 =	1		
fp(q2) =	0	0	0
	0	4.34028E-06	0
	0	0	4.34028E-06
vp(q2) =	0	cm	
	0.003959467	rad	
	0.002220336		
v(q2) =	-0.2	cm	
	0.008	rad	
	0.006		
Δv2 =	0	cm	
	0	rad	
	6.93889E-18		
error =	1.15648E-15	< 0.001 - OK	
f(q2) =	0.000694444	0	0
	0	4.77431E-06	-2.17014E-07
	0	-2.17014E-07	4.77431E-06
k(q2) =	1440	0	0
	0	209888.1988	9540.372671
	0	9540.372671	209888.1988
Δq2 =	0	tonf	
	6.61996E-14	tonf cm	
	1.45639E-12		